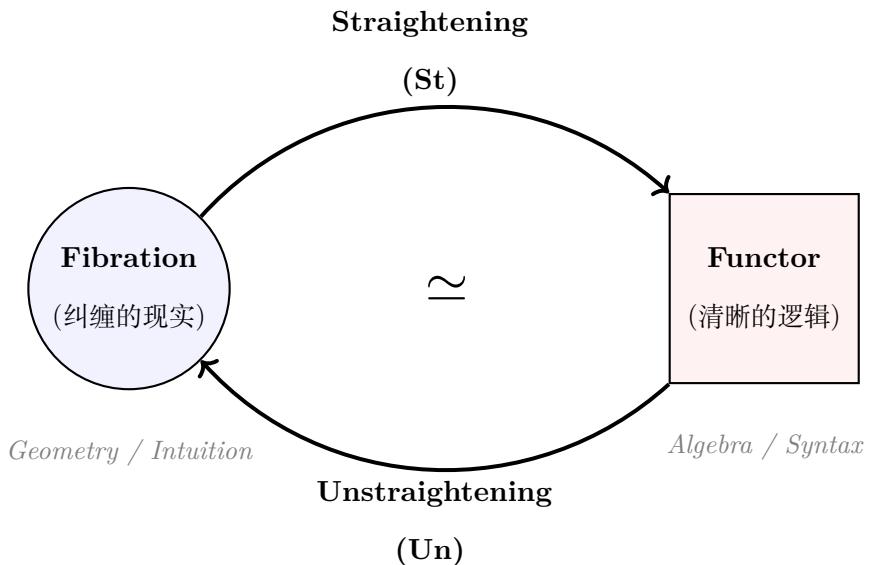


Rising Sea

——混凝土缝隙中的无穷大



高中 → 东大 → 普林斯顿 → 欧洲 → 综合同伦

目录

第一章 序章：深渊与核桃	1
1.1 深渊里的金丝雀	1
1.2 语境中的范畴	2
第二章 不存在的“为什么”	3
2.1 优等生的软肋	3
2.2 铁锤下的反抗	4
第三章 不存在的数学系	5
3.1 被驳回的梦想	5
3.2 招募传单	5
第四章 唯一的态射	7
4.1 地理准备室的访客	7
4.2 没有愚蠢的问题	8
第五章 经理与锚点	9
5.1 不仅仅是数学	9
5.2 虚构的全能	10
5.3 荒漠中的海员	11
5.4 幽灵的注视	12
第六章 哈佛的逃兵	13
6.1 $(\infty, 1)$ -范畴的修正	13
6.2 不要成为水坑	14

第七章 深渊的回声与入场券	16
7.1 色彩同伦的噩梦	16
7.2 Haynes Miller 的讲义	17
第八章 兴奋的传道者与契约	18
8.1 夜航	18
8.2 旧校舍的布朗表示定理	19
8.3 新的誓言	19
第九章 单纯集的角与哈佛的幽灵	21
9.1 怪物的新生	21
9.2 缺失的号角	22
9.3 和解	22
9.4 新的誓言	23
第十章 球面的同伦与夏日烟火	24
10.1 缺氧的潜水艇	24
10.2 强制休假	25
10.3 刹那的拓扑学	25
10.4 河堤上的幽灵	26
第十一章 单纯形萝卜与互为逆映射的救赎	27
11.1 夏末的提升与推出积	27
11.2 关东煮的同构	29
11.3 无限的休止符	30
第十二章 象牙塔的审判	32
12.1 来自“正途”的访客	32
12.2 危险的笔记	32
12.3 暴怒的理性	33
12.4 寄生虫的指控	33
12.5 留下的毒刺	34

第十三章 同伦断裂	35
13.1 只有计算的世界	35
13.2 演技	35
13.3 提升受阻	36
13.4 遗忘函子	37
第十四章 锚点	38
14.1 天台的牛奶	38
14.2 不再旁观	39
第十五章 葛城的忏悔	40
15.1 垃圾堆里的独角戏	40
15.2 数学的初恋	41
15.3 经理的铁拳	41
第十六章 南锡的流放与具体的彼岸	42
16.1 旧校舍的重逢	42
16.2 流放南锡	43
16.3 释然与觉醒	43
第十七章 无穷的深渊与新的海平线	44
17.1 降维打击	44
17.2 千夏的战争	45
17.3 赤门之春	46
17.4 那个男人的归来	46
17.5 驶向深渊	46
第十八章 两个世界	48
18.1 补欠合格的奇迹	48
18.2 象牙塔里的逃课生	49
18.3 402 室的 ∞ 直觉	49

第十九章 第三者的统计学与排中律	51
19.1 无菌室里的入侵者	51
19.2 被定义的“丑陋”	52
19.3 我的最优解	52
19.4 为了你的降维打击	53
19.5 静默的证明	54
第二十章 交换代数的迷雾与下降的梯子	56
20.1 普林斯顿的回响	56
20.2 SAG 的高墙与失效的直觉	57
20.3 中山引理的“魔术戏法”	58
20.4 来自伯克利的卫衣	59
20.5 Flatness：把代数变成电影	60
20.6 Descent：缝合破碎的世界	61
20.7 名古屋的指路人	62
20.8 葛城的极限	63
20.9 给 Lars 的信	64
第二十一章 名古屋的夏日祭	66
21.1 任性的请求	66
21.2 代数几何的吞噬者	67
21.3 提前的终点	68
第二十二章 冲绳的流体力学	70
22.1 惊喜与变量突变	70
22.2 黑潮之海的静谧	71
22.3 最佳选择：流体动力学与羞耻心	71
22.4 海平面的常数	73
第二十三章 Epsilon 的复仇与普林斯顿的来信	74
23.1 便当与傲慢的函数	74
23.2 龟兔赛跑的现实版	75

23.3 来自普林斯顿的判决书	75
23.4 Epsilon 的耳光	76
第二十四章 来自波恩的白色风暴	77
24.1 绝对零度的智力碾压	77
24.2 天才的义务	78
第二十五章 图书馆的同调	80
25.1 期末周的静默	80
25.2 消失的拓扑学	81
25.3 只有数学不会背叛 (暂时)	81
25.4 完美机器的诞生	82
第二十六章 不动点定理与告白	84
26.1 异常的男朋友	84
26.2 错误的浪漫	84
26.3 经理的判决	85
26.4 莫比乌斯之吻	85
第二十七章 幽灵的复活与具体的救赎	87
27.1 402 室的死与生	87
27.2 迟到了十年的满分答卷	88
27.3 我的塞尔 (Serre)	89
27.4 最后的奖学金	90
第二十八章 不动点与巴黎的铁锤	91
28.1 Serre: 作为工具的抽象	91
28.2 Infinity 的香气	93
第二十九章 隐士的墓碑与起飞	94
29.1 比利牛斯山的迷雾与《收获与播种》	94
29.2 尾声: 起飞	96

第三十章 新泽西的绿林与沉默的圣地	97
30.1 穿越混沌的巴士	97
30.2 IAS: 爱因斯坦走过的小径	98
第三十一章 神的沉默与失效的语言	100
31.1 Simonyi Hall 的会面	100
31.2 失效的巴别塔	101
第三十二章 窒息的茶点与草地上的发呆	103
32.1 Fuld Hall 的下午茶	103
32.2 草地上的溃败	104
32.3 爱因斯坦的房子	105
第三十三章 像婴儿一样呼吸	106
33.1 深海高压仓	106
第三十四章 泰斗的教鞭与通往天堂的阶梯	108
34.1 传说中的名字	108
34.2 最好的老师	109
34.3 清晰即仁慈	109
34.4 传承的火焰	110
第三十五章 来自太平洋的暖流	112
35.1 雪夜的访客	112
35.2 味增汤与葛城的信	113
35.3 充电完成	114
第三十六章 谱几何的母语者	115
36.1 甚至不再需要翻译	115
36.2 猎手的回归	116
36.3 认同的点头	117

第三十七章 不是终点，是入海口	118
37.1 最后一课：普林斯顿的黄昏	118
37.2 屠龙刀与恶龙	118
第三十八章 色同伦的诱惑与悖论的档案	120
38.1 京都的低气压	120
38.2 金色的重负	121
38.3 402 室的望远镜	122
38.4 局部化的最优解	123
38.5 被锁上的未来与大笑	124
38.6 笨蛋的博弈论	125
第三十九章 废墟上的邀请函	128
39.1 新的身份	128
39.2 四十年的高墙倒塌	129
第四十章 雨中的乌得勒支	131
40.1 Dom Tower 下的阁楼	131
40.2 Freudenthal 大楼的 707 室	132
第四十一章 共同的学生	134
41.1 幸存者的拥抱	134
41.2 树状同伦论的巨人	135
第四十二章 逻辑的诱惑与人造的迷宫	137
42.1 Utrecht：冰冷的机器语言	137
42.2 Science Park 904：逻辑的圣殿	138
42.3 动态的诱惑	139
42.4 Van Benthem 的假说	140
第四十三章 阿姆斯特丹的华夫饼与红灯区	142
43.1 游船与梵高的湍流	142
43.2 风车与田园牧歌	143

43.3 迷失在 De Wallen	144
第四十四章 熵增与不变量	146
44.1 样本编号 A-07	146
44.2 错误的慰藉	147
44.3 碎裂的杯子	147
44.4 无法相交的平行线	148
第四十五章 数据的形状与阿尔卑斯山的收敛序列	149
45.1 维度的诅咒	149
45.2 莱茵河畔的幽灵	151
45.3 蓝脑计划 (The Blue Brain)	151
45.4 少女峰的齿轮	152
45.5 未完成的收敛	153
第四十六章 迟来的字典与敲击	156
46.1 翻译的艺术	156
46.2 给生物学家的同调论	157
46.3 没有下次了哦	157
第四十七章 Cambridge: 巨人的回响	159
47.1 三一学院的画像	159
47.2 康河上的路径同伦	161
第四十八章 Bonn: 豪斯多夫的咖啡与自白	162
48.1 偶遇神明	162
48.2 天才的伤痕	163
第四十九章 Paris: 森林与修修补补	164
49.1 IHES: 乐观主义者	164
49.2 Paris-Saclay: 修修补补 (Bricolage)	165

第五十章 终章：直直化	166
50.1 Straightening	166
第五十一章 停滞的海平面	169
51.1 组合学的泥沼	169
51.2 重读 Pursuing Stacks	170
51.3 迟来的回旋镖	171
51.4 千夏的 “Bricolage”	172
51.5 来自过去的信标	172
第五十二章 巴尔的摩的双螺旋	174
52.1 JHU: 双重圣地	174
52.2 Emily 的代码与解放	174
52.3 千夏的 Rising Sea	175
52.4 恐怖谷与机械降神	176
52.5 第一次接触: 单价公理 (Univalence)	177
第五十三章 最终的融合	179
53.1 四把剑	179
53.2 赛博空间的通灵者	180
53.3 最后的审判 (No Goals)	181
53.4 最后的摆渡人	183
第五十四章 终章：不变不灭的誓言	185
54.1 博士学位的加冕	185
54.2 婚礼: 流形与不变量	186
54.3 数学家的誓词	186
54.4 尾声: Rising Sea	187

1

序章：深渊与核桃

“如果你不仅要砸开核桃，还要保持它的完整，甚至让它自然地展露……你就应该让水流漫过它。”

— 亚历山大·格罗滕迪克

1.1 深渊里的金丝雀

这座城市还在沉睡，但葛城莲还醒着。或者说，他从未真正醒来，只是在噩梦的浅水区挣扎。这间位于学校后巷的廉价公寓，与其说是“家”，不如说是一个巨大的废纸回收站。空气中弥漫着陈旧的纸张味、发酸的咖啡味，还有一种让人窒息的失败的味道。最引人注目的是那面墙。那里挂着一块巨大的黑板，上面密密麻麻写满了白色和黄色的粉笔字。

葛城赤着脚，手里攥着一罐早已回温的啤酒，死死盯着黑板上的一个图表——那是 Adams-Novikov 谱序列。“不对……还是不对。”他的声音沙哑，像是生锈的齿轮摩擦。在哈佛的那个冬

天, Jacob Lurie 曾指着类似的图表说: “如果你用 ∞ -topos 的观点看, 这里的收敛是平凡的。”平凡。对天才来说如呼吸般自然的事, 对他来说却是无法跨越的真空。

葛城猛地从桌上的书堆里抽出一本旧笔记, 那是他三年前试图推导 Chromatic Homotopy 时留下的手稿。现在看来, 那些公式丑陋、破碎, 充满了逻辑的断裂。它们像是一具具嘲笑他的尸体。“垃圾。全是垃圾!”嘶啦——他发疯似地撕扯着那本笔记。纸片像雪花一样散落在他脏乱的脚边。“为什么要让我看到那片海? 如果我只是个庸才, 如果我从未去过那里……”他抓起半截粉笔, 狠狠地砸向黑板。“碎!”粉笔粉碎, 黑板上只留下一个惨白的点, 像是一滴眼泪。他颓然倒在满是旧杂志的地板上, 用手臂遮住眼睛。在这个没有观众的舞台上, 一个曾经的数学天才正在慢慢腐烂。

1.2 语境中的范畴

同一时刻, 在城市的另一端。濑名凑 (Sena Minato) 的房间整洁得像是一个修道院。书桌上没有堆积如山的试卷, 只有一本摊开的英文书: Emily Riehl 的 *Category Theory in Context*。

凑戴着降噪耳机, 将楼下父母关于“偏差值”和“补习班”的争论隔绝在外。他的手指轻轻划过书页。“Yoneda Lemma (米田引理) ……”他低声呢喃。书上写着: *You can completely understand an object X by looking at all morphisms into it.*

凑闭上眼睛, 脑海中浮现出一个璀璨的星空。在学校的数学课上, 数字就是数字, 点就是点, 它们孤独、原子化地存在着。但在这里, 世界不是由原子组成的, 而是由关系组成的。一个原本看不清面目的星体 X , 当无数颗探测器 (Probe) Y 向它发射信号 (态射 $Y \rightarrow X$) 时, X 的轮廓就被这些信号完美地勾勒了出来。

“不需要切开核桃, 只需要观察水流绕过核桃的样子, 就能知道核桃的形状。”凑感到一种电流流过脊背的战栗。这才是真理。相比之下, 明天要考的解析几何, 那种用坐标暴力破解图形的做法, 丑陋得令人作呕。

他合上书, 小心翼翼地把它藏进书包的最底层, 像是在藏匿一颗违禁的核弹头。他并不知道, 在这个看似平庸的世界上, 还有另一个人正对着黑板绝望。

2

不存在的“为什么”

2.1 优等生的软肋

藤井千夏是县立北高中的“完美学生”。她的现代文常年全校前十，英语流利得能和外教谈笑风生，世界史更是能把复杂的哈布斯堡王朝谱系倒背如流。她是老师眼中的模范，是同学眼中的学霸。除了数学。

并不是因为她算不对。只要套用公式，她能算出完美的答案。让她痛苦的，是“为什么”。

“藤井，你来黑板上做一下这道向量题。”被称为“铁锤”的数学老师田中点了她的名。千夏深吸一口气，走上讲台。粉笔在黑板上发出笃笃的声响。已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ，将其平移后……她在最后一步停住了。

“老师，”千夏转过身，声音很小，带着一丝迟疑，“为什么……平移之后的向量，和原来的向量是‘相等’的？”全班安静了一瞬。“它们明明起点不一样，画在黑板上的位置也不一样。在物理上，作用在不同点的力效果是不同的……为什么在这里，它们就是同一个东西？”

短暂的死寂后，教室里爆发出一阵压抑的哄笑。“喂喂，藤井又在钻牛角尖了。”“这就是定义啊，哪有为什么。”“学霸也有犯傻的时候啊，好可爱。”

田中老师皱起眉头，用教鞭敲了敲黑板，不耐烦地说：“藤井，不要问这种理所当然的问题。在数学里，自由向量的定义就是不考虑起点。这是规定。记住它，考试能拿分就行了。你有问题很多余。”

千夏的脸瞬间涨得通红，像是被人当众打了一耳光。又是这样。每次她试图去理解那些“理所当然”背后的逻辑时，得到的永远是嘲笑。仿佛她的思考本身就是一种愚蠢。她低下头，手指紧紧捏着粉笔，指节发白。“对不起……”

2.2 铁锤下的反抗

与此同时，在教室的最后一排。濑名凑正在笔记本上画交换图。他听到了千夏的问题，手中的笔停了一下。他抬起头，看了一眼那个站在讲台上显得孤立无援的背影。

讲台上，田中老师还在唾沫横飞地讲解那道“暴力解出”的解析几何题。“注意这里！设圆心为 (x, y) ，然后代入方程，暴力展开……”

凑在心里冷笑。用铁锤去砸核桃。虽然核桃碎了，能吃了，但那个原本完美的几何结构也随之毁灭了。他想起了昨晚读的 Emily Riehl，想起了 Grothendieck 的 Rising Sea。不要去攻击问题，而是要建立一个足够宏大的体系，让海平面上升。

他是这所学校唯一的异类。但他没想到，原来在这个教室里，还有一个异类。

3

不存在的数学系

3.1 被驳回的梦想

午休时间，凑走进了学生会办公室，把一张申请表拍在桌子上。“我要申请成立新社团。”

学生会长推了推眼镜，拿起那张纸：“‘现代数学研究部’？……活动内容：研读 EGA (代数几何基础)，讨论 ∞ -category，以及……致敬格罗滕迪克？”会长像是看疯子一样看着他：“驳回。没有至少三名成员，不能成立。而且我们已经有奥数社了。”

“现在的数学社只会做题，”凑冷冷地说，“他们沉迷于解题技巧的奇技淫巧。我要找的，是能理解‘米田引理’的人，是能看到数学大统一图景的人。”“那就去找吧。如果你能找到另外两个疯子的话。”

3.2 招募传单

凑在学校最偏僻的布告栏——通常只有失物招领和快过期的社团海报——贴出了一张奇怪的传单。没有动漫少女，没有花哨的字体，只有一段用 L^AT_EX 排版得极其优雅的文字：

DOCUMENT

致那些厌倦了铁锤的人：

如果你看到下面的公式时会感到灵魂的震颤：

$$X \cong \text{Nat}(h_X, -)$$

如果你认为两个数学对象之间的关系比对象本身更重要；

如果你相信，解决一个难题的最好方法是把它“埋葬”在更一般的理论中；

欢迎来到 [第 0 同调群]。

我们不刷题，我们只造海。

——地点：旧校舍三楼，废弃地理准备室。

路过的学生指指点点：“这是什么？暗号？”“完全看不懂，好恶心。”凑躲在拐角处，看着人来人往。在这个追求偏差值的高中里，谁会关心这种没有任何实际用途的“抽象废话”（Abstract Nonsense）呢？

4

唯一的态射

4.1 地理准备室的访客

放学后，千夏拿着从市立图书馆借来的书，犹豫地走上了旧校舍的三楼。那天看到传单后，那个公式像是一个谜题萦绕在她心头。她查阅了所有资料，最后在一个落满灰尘的书架上找到了这本书。Saunders Mac Lane 的 *Categories for the Working Mathematician* (数学工作者的范畴论)。

她推开地理准备室的门。夕阳透过满是灰尘的窗户，把教室染成了琥珀色。那个贴传单的男生——濑名凑，正站在黑板前。

凑听到开门声，转过身。他以为又是来嘲笑他的学生会成员，但看到的却是那个在数学课上被嘲笑的女生。以及，她怀里抱着的那本黄色的书。那是 GTM 系列。那是数学界的圣经。

凑愣住了。“那是……”他的声音有点干涩。

千夏有些慌乱地抱紧了书，像是做错事的孩子：“那个……我对传单上的那个公式很好奇。我去图书馆查了，只有这本书里提到了这个。”她低下头，脸颊微红：“虽然……虽然公式大半看不懂。我也可能很笨，连向量为什么相等都搞不明白……”

4.2 没有愚蠢的问题

“那个问题不愚蠢。”凑打断了她。他放下粉笔，眼神前所未有的认真。

他走到黑板前，画了两个分开的箭头， \vec{v} 和 \vec{w} 。“老师说它们‘相等’，这其实是不严谨的说法。在范畴论里，这叫‘自然同构’（Natural Isomorphism）。”

千夏抬起头，眼睛微微睁大：“自然……同构？”

“你感觉它们不一样，是因为它们作为‘具体的几何对象’，确实占据了不同的空间位置。你的直觉是非常敏锐的，藤井同学。”凑看着她的眼睛，语速因为激动而变快：“但是，如果我们不看它们的位置，只看它们与空间这一‘结构’的相互作用方式——也就是平移操作——它们表现出的‘性质’是完全一致的。就像两个长得一模一样的双胞胎，虽然是两个人，但在基因的层面是‘同构’的。”

“大多数人只是接受了‘相等’这个方便的谎言，用来快速计算。而你察觉到了‘相等’背后的‘结构同一性’。”凑深吸了一口气，露出了一个淡淡的微笑：“这不是愚蠢。这是哪怕很多大学生都没有的、对结构的直觉。”

千夏感觉心脏漏跳了一拍。一直以来被嘲笑的“钻牛角尖”，在这个少年的口中，竟然变成了“对结构的直觉”。那个瞬间，她觉得眼前的少年不仅仅是在讲数学。他是在把她从那个充满嘲笑的狭窄盒子里拉出来，带她去看一片更广阔的天空。

“原来……是这样啊。”千夏抱着那本厚厚的书，眼角泛起一丝泪光，却绽放出了笑容，“这本书，我可以留在这里看吗？”

“当然。”凑指了指旁边堆满旧地球仪的桌子，“欢迎来到数学系。”

5

经理与锚点

5.1 不仅仅是数学

从那天起，地理准备室不再是凑一个人的孤岛。千夏虽然看不懂那些复杂的交换图，但她开始尝试理解凑口中的“美”。她会指着 Mac Lane 书上的一行字问：“这个‘泛性质’（Universal Property），是不是就像是……人群中最独特的那个，所有人都必须通过它来定义自己？”凑会惊讶地看着她：“你……真的没学过数学吗？这个比喻太精准了。”

渐渐地，凑发现自己开始期待每天放学后的时光。一开始，他觉得千夏是个奇怪的女生。但慢慢地，他看到了她的温柔。她会给沉迷推导忘了时间的他带饭团。她会给硬邦邦的椅子加上软垫。她甚至在教室的一角挂上了一块小白板，上面写着“数学系经理今日备忘录”。

“经理？”凑看着那个头衔，哭笑不得。“当然。没有经理的话，某些只会造海的人可能会饿死在黑板前吧。”千夏一边整理着凌乱的粉笔槽，一边笑着说。

那天黄昏，凑看着在夕阳下认真擦黑板的千夏。金色的光晕笼罩着她，粉笔灰在光束中飞舞。凑突然觉得，那个原本只有冷冰冰的箭头和对象的范畴世界，突然有了温度。他一直以为自己只需要数学就够了。但现在，他发现，这个准备室里，美好的不仅仅是数学。

5.2 虚构的全能

地理准备室的空气里弥漫着粉笔灰的味道。凑站在黑板前，眼神狂热，手中的粉笔在黑板上画下了一个巨大的、几乎占据了半面墙的圆圈。

“千夏，你看。”凑用力敲了敲黑板，“这就是范畴论最美妙的地方——完备性（Completeness）。想象一下，如果我们构造一个足够大的范畴，它拥有所有的极限和余极限……那我们就是上帝！我们可以在里面进行任何运算，想怎么粘合就怎么粘合，想怎么切割就怎么切割！这就是数学的绝对自由！”

凑转过身，期待地看着坐在旧课桌后的千夏，等待着这位“经理”的惊叹。

然而，千夏并没有像往常那样点头称赞。她皱着眉头，手里转着一支圆珠笔，目光死死地盯着那个代表“全能”的圆圈。

“濑名君，”千夏突然开口，声音里带着一丝不确定的迟疑，但逻辑却异常清晰，“这在逻辑上……说不通吧？”

凑愣了一下，像是被人从云端拽了一把：“唉？哪里说不通？这是数学定义的理想状态啊。”

“如果这个范畴真的‘拥有所有’……”千夏站起身，走到黑板前。她比凑矮半个头，但此刻的气势却丝毫不弱。她伸出手指，在那个大圆圈里随便点了两个点，标记为 A 和 B 。

“如果它能生成一切，意味着任何两个对象之间都能通过某种‘粘合’（Colimit）互相转化，对吧？”

“理论上是这样……”凑下意识地点头。

“我在现代文课上学过索绪尔的语言学。”千夏转过身，认真地看着凑，“如果一个词汇能指代宇宙万物，那这个词汇就失去了意义。‘全能’往往意味着‘空洞’。”

她拿起另一支粉笔，在 A 和 B 之间画了两条反向的箭头。

“你看，如果你的这个世界真的那么自由，那 A 到 B 有通路， B 到 A 也有通路。所有的东西都能变成其他东西。那在这个世界里，‘区别’还存在吗？所有的星体都会坍缩成一个点吧？”千夏歪了歪头，眼神犀利，“这不就是一个……每个人都只能排座次（Preorder），却不能拥有独立个性的死寂世界吗？”

轰——

凑的大脑里仿佛闪过一道白光。他手中的粉笔“啪”的一声掉在了地上。

千夏的话像是一把利刃，精准地切开了他那些宏大幻想的表皮。他脑海中迅速闪过弗雷德(Freyd)的著名观测：

一个拥有所有小余极限的小范畴，必定是一个预序集(*Poset*)。

也就是说，在这种所谓的“全能”范畴里，对象之间只有“小于等于”的关系。同构即相等。那不是丰富多彩的大海，那只是一条单调的数轴。

“我……”凑张了张嘴，额头上渗出了细密的冷汗。他一直沉迷于结构的宏大，却忽略了逻辑的代价。

“你需要……你需要更大的宇宙(**Universe**)来容纳它们，或者放弃这种廉价的全能。”凑喃喃自语，眼神从震惊转为了一种近乎恐惧的敬佩。他看向眼前这个连向量平移都要问“为什么”的女孩。

“看吧。”千夏叹了口气，弯腰帮他捡起粉笔，放回粉笔槽里，“果然，所谓的‘自由’都是有代价的。濑名君总是只看漂亮的形状，却不管装这些形状的盒子会不会被撑爆呢。”

她拍了拍手上的灰尘，嘴角扬起一丝小得意的弧度：“以后这种‘逻辑漏洞’，就由经理来帮你补上吧。”

凑看着她，心脏剧烈地跳动了一下。这不仅仅是因为被指出了错误，更是因为他意识到，在这个地理准备室里，他找到的不仅仅是一个后勤经理。

他找到了一面镜子。一面能照出他思维盲区、却又无比清澈的镜子。

5.3 荒漠中的海员

“但是，我们还是只有两个人。”千夏有些发愁地看着那张依然无人问津的传单，“再这样下去，会被学生会强制废部的。”“没关系。”凑正在黑板上推导 Yoneda Lemma 的对偶形式，头也不回地说，“在这片荒漠里，能找到一个同伴已经是奇迹了。”

“不行！”千夏握紧拳头，“这么美的东西，不能就这样消失。我要去再贴一张海报！我会画画，我来重新设计版面，让大家知道这里不是怪人的聚集地！”

看着千夏充满干劲的背影，凑的心里涌起一股暖流。那是他第一次想要为了一个人，去守护这个小小的、摇摇欲坠的“系”。

5.4 幽灵的注视

千夏设计的新传单还没来得及贴出去，那张旧传单却引来了意想不到的访客。

放学后的走廊，夕阳把影子拉得很长。凑正准备离开，却发现布告栏前站着一个男人。那个男人穿着一身已经起球的灰色运动服，脚上踩着一双在这个季节显得格格不入的塑料拖鞋。他头发乱得像鸟窝，眼圈深重，手里拿着一罐刚买的黑咖啡。

男人没有理会凑警惕的目光，而是死死盯着那张海报上的公式。“Grothendieck Rising Sea ……” 男人的声音沙哑、低沉，带着一种来自地底深处的寒意。“在现在的日本高中里，居然还有人想用‘特里凡得琅（Trivandrum）’的方式思考问题？”

凑愣住了。特里凡得琅，那是格罗滕迪克隐居去世的地方。这不是普通高中老师会知道的词。“你是谁？”凑问道。

男人转过头，眼神浑浊，却又像是一潭深不见底的死水。他看着凑，就像看着一个还没见过地狱的幽灵。“我？”男人自嘲地笑了笑，嘴角勾起一抹痛苦的弧度。“我是这所学校的毕业生。一个……溺死在海里的幽灵。”

那是葛城莲。在那个瞬间，命运的齿轮开始转动。想要造海的少年，守护少年的少女，以及被海吞噬的男人。三个人的轨迹，在这一刻交汇。

6

哈佛的逃兵

6.1 $(\infty, 1)$ -范畴的修正

布告栏前。夕阳将两人的影子拉得很长。葛城莲手里捏着那罐廉价咖啡，眼神慵懒地扫过凑和千夏精心制作的海报。

“你的这个定义， $X \cong \text{Nat}(h_X, -)$ ，写得倒是很漂亮。”葛城伸出一根手指，在海报的玻璃框上点了点。“但是……”他的眼神突然变得锐利了一瞬，仿佛那个颓废的家里蹲外壳裂开了一道缝隙，露出了里面曾经锋利的刃。

“如果你真的想理解现代的‘海平面上升’，停留在 1960 年代的 SGA4 是不够的。世界已经变了，小子。”葛城从口袋里掏出一支快没油的圆珠笔，在海报的边角处——那个千夏画的“大海”旁边——随手写下了个符号：

$(\infty, 1)$ -Cat

“你需要把这个等式放在无穷范畴（Infinity Category）里看。当同构（Isomorphism）变成了等价（Equivalence），而等价本身又只是高阶同伦的一层结构时……米田引理就不再是一个静态的映射，而是一个连贯的、生生不息的空间。”

凑感到一阵头皮发麻。这个符号，是目前数学界最前沿的领域。“你到底……”

葛城打了个哈欠，又变回了那个颓废的家里蹲。“我以前在美国读书。导师是个天才，也是

个疯子。他写了一本几千页的书，叫 *Higher Topos Theory*。我们管他叫 Jacob。”

Jacob Lurie。凑的瞳孔猛地收缩。那是现代同伦论的神。“你是……Lurie 的学生？”

“前学生。”男人纠正道，眼中闪过一丝难以察觉的痛苦。

“我曾经以为我是天才。我在东大读硕士的时候，就已经读完了 EGA 和 SGA。我是为了践行 Rising Sea 的哲学，才决定去哈佛的。我要去找那个现代最像 Grothendieck 的人，那个唯一真正读懂了 *Pursuing Stacks* 的人。”

葛城的声音变得低沉，仿佛陷入了回忆的泥沼。“我去了。我在一次次讨论课中，终于学会了 Quasicategory。我开始理解 Higher Topos 背后的含义。我以为我抓住了真理的尾巴，我以为我终于可以开始‘造海’了。”

他捏紧了手中的咖啡罐，指节发白。“但是，就在我觉得我‘懂了’的时候……我的同学，Gijs Heuts，他已经能熟练地运用 Infinity Operad 的语言了。”

“他们——Lurie 和 Heuts——站在黑板前，用 Spectral Algebraic Geometry (谱代数几何) 讨论 Chromatic Homotopy Theory (色同伦论)。那些我引以为傲的、费尽心血才理解的概念，在他们嘴里就像是加减乘除一样简单。”

“我听着他们的对话，感觉自己像个无知的孩子。我越来越读不懂 Seminar 之前的 Handout。我脑子里的数学图像……在变淡。那些曾经清晰的结构，变得模糊、破碎。”

葛城抬起头，眼神空洞得可怕。“那里没有空气。全是怪物。我窒息了，所以我逃了。”

6.2 不要成为水坑

葛城转过身，拖着拖鞋发出“啪嗒啪嗒”的声音准备离开。

就在这时，他运动裤口袋里的手机震动了一下。那是一种廉价而刺耳的震动声。葛城下意识地掏出手机，屏幕裂了一角的手机上弹出了两条通知。

一条是来自“老妈”的短信：“莲，隔壁的小健今年考上公募的市役所职员了。你还要在那边晃荡到什么时候？如果不回来的话，至少把下个月的房租自己解决吧。”

另一条是催缴电费的警告邮件：【东京电力】您的欠费金额已逾期……

葛城的拇指悬停在屏幕上，指节因为用力而发白。那一瞬间，哈佛的象牙塔、无穷范畴的优雅结构，在“市役所职员”和“电费”面前显得如此苍白无力。这就是重力。这就是把人死死按在泥潭里的现实引力。

他猛地按灭屏幕，像是在掐灭一个烟头。他没有回头，声音里带着一种从肺腑深处挤出来的

疲惫与自嘲：

“别搞什么数学系了，小子。那个世界会吞噬你。去老老实实算积分，考个好大学，当个公务员，按时拿工资，这才是幸福。”

“等等！”凑冲上去，张开双臂拦住了男人的去路。千夏也跟了上来，紧张地抓着凑的衣角。“如果你真的是见过‘大海’的人……”凑死死盯着男人的眼睛，“那你怎么能忍受在这个全是‘水坑’的世界里当一个废人？”

葛城停下脚步。废人。这两个字像针一样刺破了他刚才用来防御的世俗外壳。他看着眼前这个眼神炽热、不知天高地厚的少年，仿佛看到了十年前那个意气风发的自己——那个还没有被电费账单困扰，还没有被母亲的叹息压垮，只知道仰望星空的自己。

嫉妒。羡慕。还有一丝连他自己都不愿承认的——想要被救赎的渴望。哪怕只有一点点，他也想再次触碰那个不被“市役所”定义的纯粹世界。

“葛城。”男人抓了抓乱糟糟的头发，把那台催债的手机塞回口袋深处，“我叫葛城莲。虽然没法当你的指导老师，但我家就在学校后门那条街……”

他抬起头，眼神中闪过一丝挣扎后的决绝：“如果你想知道 Jacob 那家伙后来又搞了什么疯癫的理论，或许……我可以讲讲。但在那之前，你得先请我喝杯像样的咖啡，速溶的我已经喝吐了。”

7

深渊的回声与入场券

7.1 色彩同伦的噩梦

葛城的房间与其说是“家”，不如说是一个巨大的废纸回收站。空气中弥漫着陈旧的纸张味、发酸的咖啡味。凑站在门口，看着那面巨大的黑板。那上面写满了他从未见过的数学符号，它们像是一群疯狂的蚂蚁，在黑板上构筑起一座通天塔。

“你说你逃跑了。”凑指着黑板，声音颤抖，“那这满屋子的是什么？这上面的谱序列（Spectral Sequence）也是幻觉吗？”

葛城坐在地上，手里捏着变温的啤酒罐。听到这句话，他突然像被触碰了逆鳞的野兽一样跳了起来。“想知道我在想什么？想知道我在哈佛最后看到的‘地狱’是什么？好啊，高中生。别眨眼。”

葛城抓起粉笔，在黑板上疯狂地书写。粉笔折断的声音在房间里回荡。

THE CHROMATIC NIGHTMARE

我们试图理解 $L_{K(n)}S$ (The $K(n)$ -local sphere spectrum)。为了计算它的同伦群，我们

需要 Adams-Novikov Spectral Sequence：

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi_{t-s}(S^0)$$

但在高度 $n \geq 2$ 时，经典代数几何失效了。我们需要 **Derived Algebraic Geometry**。

$$\mathrm{Spf}(E_n) \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$$

Heuts 说：利用 ∞ -operad 的结构，我们可以直接构造……

“听着！奇异上同调和层上同调在阿贝尔群系数下是等价的。但是！一旦系数变成了非阿贝尔群，这个同构就崩溃了！”

葛城猛地转过身，粉笔灰洒落在他的旧运动服上，眼神狂热而绝望。“为了修复这个，我们需要把‘集合的层’扔进垃圾桶，换成‘空间的层’（Sheaves of Spectra）！这就是现在的战场。这就是 Gijs Heuts 他们在玩的东西。”

他指着黑板边缘一个模糊的箭头：“**BUT I CAN'T SEE IT!** 图像消失了。同伦相干性（Homotopy Coherence）淹没了一切直觉。我看不见那个几何结构了。当那个图像消失的时候，数学家就死掉了。”

凑站在原地，怀里抱着书包。他听不懂那些具体的符号，但他听懂了那种绝望。那是伊卡洛斯在坠落前看到的、足以烧毁视网膜的太阳。

7.2 Haynes Miller 的讲义

狂热褪去，葛城颓然倒在沙发上，仿佛刚才的爆发抽干了他所有的力气。他指了指角落里的书堆。“那里面有一本 Haynes Miller 的 MIT 代数拓扑讲义。如果你想去那种‘用范畴论重构宇宙’的地方，那是你必须跨过的第一道门槛。”

凑走过去，翻出了那本没有封皮的打印稿。“别去想什么 ∞ -topos 了。你现在连爬都没学会。”葛城冷冷地说，“下周这个时候。如果你能用范畴论的语言告诉我，什么是切除定理（Excision）的‘灵魂’，我就带你去见识真正的深渊。”

凑紧紧抱着那本讲义，眼神中没有恐惧，只有燃烧的渴望。“我会找到的。那个灵魂。”

8

兴奋的传道者与契约

8.1 夜航

接下来的一周，凑像是从世界上消失了。他在课堂上画图，在吃饭时发呆。Emily Riehl 的书和 Haynes Miller 的讲义在他的脑海里发生了剧烈的化学反应。

深夜。凑的房间。他死死盯着 Eilenberg-Steenrod 公理中的切除公理：

$$H_*(U, U \cap V) \cong H_*(X, V)$$

“教科书上说这叫‘局部信息的独立性’。但这太丑陋了。”凑在草稿纸上画了一个正方形。“如果是范畴论的话……这是一个 Pushout (推出)。切除定理本质上是在说，同调函子把‘拓扑空间的推出’映成了‘链复形的正合序列’。”

突然，一道电流流过全身。如果同调是把“几何粘合”变成“代数加法”……那么上同调 (Cohomology) 呢？它是逆变函子。它把箭头反过来了。“既然它把余积转化为积……根据米田引理的直觉……”

他在纸上写下一个大胆的猜测：

$$H^n(X; G) \cong [X, K(G, n)]$$

“上同调……是可以被‘表示’的。它不是在计算空间，它是在测量空间到一个特定对象（Eilenberg-MacLane 空间）的映射类。”

这一刻，枯燥的代数拓扑在他眼中崩解，重组成了一个宏大而优雅的范畴学结构。

8.2 旧校舍的布朗表示定理

第二天放学，旧校舍。千夏正在擦黑板，她发现今天来得很早，而且处于一种异常亢奋的状态。

“藤井！你听我说！”凑一把拉住千夏，指着黑板上刚画好的一个巨大的交换图。“我明白了！我终于明白葛城先生说的‘直觉’是什么了！”

千夏被他的气势吓了一跳：“哎？是……是关于那个作业吗？”

“对！你看，如果我们把空间看作一个范畴，切除定理其实保证了某种‘粘合’操作的连续性。而这意味着——”凑在黑板上重重地写下：

$$H^n(X; G) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Top})}(X, K(G, n))$$

“上同调群不是在‘计算’空间，它是在‘测量’空间！它本质上就是米田嵌入！每一个上同调类，都对应着一个映射到 Eilenberg-MacLane 空间的函数！”

凑激动地抓着千夏的肩膀，眼睛亮得惊人：“这就好比说，我们不需要去数一个玩具有多少个孔，我们只需要看它能以多少种方式穿过一个模具！这太美了！这是宇宙中最完美的对应！”

千夏看着眼前这个滔滔不绝的少年。其实她完全听不懂什么是 $K(G, n)$ ，也听不懂什么是米田嵌入。但是，她看懂了凑的表情。那是一种纯粹的、因为触碰到了真理而颤抖的喜悦。她微笑着，静静地听着，并没有打断他。“虽然我不懂，”千夏温柔地说，“但如果它能让濑名君这么开心，那它一定是很厉害的东西。”

8.3 新的誓言

当晚，葛城莲的公寓。凑给出了那个关于“可表示性”的答案。葛城看着黑板上的公式，喉咙发干。

这小子……不，这个怪物。他不是“学会”了代数拓扑。他是直接跳过了所有的技术细节，一眼洞穿了这门学科在 1950 年代才被那些大师们发现的深层结构。**布朗表示定理 (Brown Representability Theorem)**。

葛城心中的那团死灰，突然猛烈地复燃了。自己是个失败者，没错。但是，如果能亲手培养出一个超越自己的怪物呢？

葛城深吸一口气，脸上那种玩世不恭的表情彻底消失了。他变得严肃，甚至带着一丝狰狞的认真。他走到房间的角落，把自己那一堆乱七八糟的衣服、喝剩的咖啡罐、废纸全都一股脑地扫到了旁边，清理出了一张干净的桌子。

“坐下。”葛城命令道。凑愣了一下，乖乖坐下。葛城拉过一把椅子，坐在凑的对面，目光如炬。

“听着，濑名。你刚才说的那个直觉，是对的。那个空间叫 Eilenberg-MacLane 空间。而你所预言的那个定理，叫 **布朗表示定理 (Brown Representability Theorem)**。那是同伦论的核心之一。”

凑的眼睛亮了起来。

“但是，”葛城话锋一转，“你有直觉，但你的基础像瑞士奶酪一样全是洞。你懂范畴，但你不懂具体的几何构造。你懂伴随，但你算不出来一个简单的谱序列。现在的你，只是一个断腿的巨人。”

葛城从那一堆书山里抽出了三本书，重重地拍在桌子上。一本是 Hatcher 的 *Algebraic Topology*。一本是 May 的 *A Concise Course in Algebraic Topology*。还有一本是他自己的手写笔记。

“你说你想建‘数学系’？你想寻找同好？”葛城看着少年的眼睛。“我就是你的同好。从今天开始，忘掉高中的那些垃圾数学课。我会用研究生的标准来训练你。我会把那一堆‘核桃’放在你面前，但我不会给你铁锤，我会教你如何制造‘上涨的海水’。”

“但是有一个条件。”葛城指着黑板上的那个公式。“你要答应我，这辈子绝对不要把数学仅仅当作解题的工具。你要替我去看一看……那个我没能到达的、无穷范畴的尽头。”

凑看着葛城，感受到了对方传递过来的沉重而滚烫的期望。他站起身，深深地鞠了一躬，声音颤抖却坚定：“是！我会去的。我们一起去。”

窗外，风吹过树梢，像是海浪的声音。在这个废弃的地理准备室里，一支属于两人的、驶向数学深海的舰队，正式启航了。

9

单纯集的角与哈佛的幽灵

9.1 怪物的新生

一个月。仅仅一个月。

葛城莲看着桌上那叠厚厚的演草纸，那是濑名凑这一个月的战果。Mayer-Vietoris 序列？已经熟练得像是呼吸。庞加莱对偶 (Poincaré Duality)？凑不仅理解了，甚至开始尝试用上同调运算 (Cohomology Operations) 去攻击它。万有系数定理？他已经能闭着眼睛推导。

葛城感到一种久违的战栗。那是他在哈佛第一次见到那些真正的天才时才有的感觉——一种混合了恐惧与兴奋的颤抖。这小子不是在“学”数学，他是在“吞噬”数学。

“结束了。”葛城把关于同调代数的最后一页讲义扔进垃圾桶，“经典的代数拓扑已经没有什么能阻挡你了。”

凑抬起头，眼睛里布满了血丝，却亮得惊人：“那接下来呢？这就是全部了吗？”

“不。”葛城转身走向房间深处，从一个上锁的抽屉里，拿出了一个黑色的笔记本。那不是打印稿，是一本印着“Harvard COOP”标志的旧笔记本。封皮已经磨损，纸张泛黄，上面还残留着几滴多年前的咖啡渍。

那是他在波士顿最寒冷的冬天里记下的。讲台上站着那个被称为 Jacob Lurie 的男人，黑板上写满了重塑数学未来的符号。那时候的葛城，拼命地抄写，试图抓住那些从指缝间溜走的智慧。

“这是单纯同伦论 (Simplicial Homotopy Theory)。”葛城的手指摩挲着笔记本的封面，声音沙哑，“这是通往 ∞ -Category 的入场券。是我……曾经没能走完的路。”

9.2 缺失的号角

葛城走到黑板前。这一次，他没有像往常那样随意涂写。他深吸了一口气，擦掉了所有的粉笔灰，把黑板变得像镜子一样干净。他拿起粉笔，手竟然微微有些颤抖。

记忆如潮水般涌来。在那间阶梯教室里，他曾因为无法理解 Kan Fibration 的高维几何直观而感到窒息。那种自我怀疑，那种觉得自己是冒牌货的绝望。但现在，当粉笔触碰到黑板的那一刻，那些恐惧消失了。因为他背后有一双眼睛在看着他。那双眼睛里没有审视，只有纯粹的信任和渴望。

“看着，凑。”葛城在黑板上画了一个三角形。但他擦掉了其中一条边和内部。“这是一个单纯形 (Simplex)， Δ^2 。如果你去掉这一条边和内部，它就不完整了，这叫‘角’ (Horn)，记作 Λ_1^2 。”

他转身画出了那个著名的交换图：左边是角 Λ_n^k 嵌入到单纯形 Δ^n 。右边是一个映射 $X \rightarrow Y$ 。

“所谓的 Kan Fibration，”葛城的声音变得低沉而温柔，像是在讲述一个古老的神话，“就是无论你有多少维的‘残缺的角’，只要你想把它填满……你总是能做到。”

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_n^k & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \downarrow & \exists h \nearrow & \downarrow p \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & Y
 \end{array} \tag{9.1}$$

他画出了那条虚线箭头 (Lifting)。“这就是‘提升性质’ (Lifting Property)。在单纯集合 (Simplicial Sets) 的世界里，这就代表了‘连续性’和‘可逆性’的代数本质。”

9.3 和解

画完最后一笔，葛城后退了一步。完美的图表。这一次，他没有感到窒息。相反，他感到一种奇异的平静。

这么多年来，他一直觉得自己是 Jacob Lurie 的逃兵，是一个被高阶范畴论击碎的废人。但看着黑板上这个清晰无比的定义，他突然意识到：哪怕是残缺的角，也是可以被填补的。

他的人生也许就像那个 Λ_n^k ，充满了缺失的边，充满了未完成的梦想。但是，只要有“Lift”存在，只要有某种结构支撑……残缺就能被填满。眼前的这个少年，就是他的 Lift。

他不需要自己成为大师。他只需要把这把火炬，完整地、准确地交到这个人手中。

“葛城先生？”凑的声音打断了他的沉思，“这里的 Λ_n^k 是不是对应着拓扑空间里的圆盘的一半？如果我们把这个看作是高阶群胚 (∞ -Groupoid) ……”

葛城回过头，看着凑。“直觉很敏锐。”葛城笑了。这是他第一次发自内心地、没有阴霾地笑，“没错。普通的范畴是僵硬的，但单纯集是柔软的。它允许我们在组合学 (Combinatorics) 的骨架上，通过这些‘填充’来模拟连续的肉体。”

他把那本哈佛笔记本递给凑。“拿去吧。这里面记录了单纯集、Kan 复形、以及模型范畴 (Model Categories) 的基础。”

凑双手接过笔记本，像是接过一把圣剑。“这东西很难，”葛城警告道，“比你之前学的同调论难十倍。它枯燥、抽象，甚至反直觉。你需要重新训练你的大脑，不再去想‘形状’，而是去想‘组合数据’。”

“我不怕。”凑翻开第一页，看着上面密密麻麻的英文手写体，眼中燃烧着火焰，“只要它是通向大海的路。”

9.4 新的誓言

葛城重新靠在讲台上，看着正在如饥似渴阅读笔记的少年。

“喂，凑。”“嗯？”“如果有一天，你真的搞懂了这本笔记后面写的 Infinity Topoi”葛城停顿了一下，似乎在寻找措辞，“记得去我的坟头烧一篇论文告诉我。”

“别说这种不吉利的话啊！”凑抗议道。

“我是说真的。”葛城望着窗外的夕阳，夕阳把旧校舍染成了金色，就像那个遥远的、他曾梦想到过的数学天堂，“因为到了那个时候，你就彻底超越我了。我就没什么能教你的了。”

“在那之前，”葛城拿起一根新的粉笔，精准地弹了一下凑的额头，“先把单纯集的面算子 (Face Operators) 和退化算子 (Degeneracy Operators) 给我背下来！这可是基本功！”

“痛！……我知道了啦！”

在这个满地废纸、贴满奇怪符号的房间里，一个失败的归乡者，和一个狂妄的高中生，在一起钻研数学不是为了考试，不是为了升学。是为了那个名为“无穷”的承诺。

10

球面的同伦与夏日烟火

10.1 缺氧的潜水艇

葛城的公寓已经三天没有开窗通风了。这里现在的氧气含量大概只有平流层的一半，剩下的一半被粉笔灰、陈旧的咖啡因分子，以及高浓度的单纯同伦论 (Simplicial Homotopy Theory) 所占据。黑板上已经没有空隙了。

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

$$\cdots \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots$$

无数的单箭头、双箭头、虚线箭头在黑板上交织成一张巨大的捕梦网。濑名凑蹲在地上，手里紧紧攥着那本哈佛笔记，嘴里念念有词，像是一个走火入魔的信徒。“如果是 Kan Complex，那么所有的角都能被填充……”凑的眼睛盯着虚空中的一点，“但是如果是 Quasi-category，只有内角 (Inner Horn) 保证能填充……这意味着什么？这意味着结合律在‘至多同伦’ (up to homotopy) 的意义下成立……”葛城躺在房间角落的一堆旧杂志上，闭着眼睛，像是一具死尸。但他还会说话。“别光想代数结构。想几何。内角填充就像是你试图把两个三角形拼在一起，中

间那条边就是‘复合’。如果它是唯一的，那就是严格范畴；如果它是可缩空间，那就是 ∞ -范畴。”“我不明白……那个‘空间’到底在哪里？”凑抓着头发，濒临崩溃。这里的气场太强了。两个疯子正在深海里下潜，完全忘记了他们还是需要呼吸的人类。

10.2 强制休假

。

“砰！”门被推开了。千夏穿着一身淡蓝色的浴衣，头发盘了起来，手里拿着两把团扇。“停！今天‘数学系’全员强制休息！”葛城皱眉，手里还拿着粉笔：“我刚讲到 Whitehead Theory 证明关键……”“驳回！”千夏把团扇塞进葛城手里，不容置疑地说，“今晚是淀川花火大会。我已经买好章鱼烧的票了。如果不去，我就把你们黑板上的所有公式都擦掉画乌龟！”

10.3 刹那的拓扑学

河岸边人山人海。第一发烟花升空，在夜空中炸开一朵巨大的金色牡丹。“哇——”千夏仰着头，眼里的光芒比烟花还璀璨，“好美！濑名君，你看！”

凑穿着制服（他没有浴衣），仰头看着那朵正在扩散、然后坠落的光点。他的瞳孔里映着火光，但他的脑海里映着的是结构。

“确实很美。”凑喃喃自语，“从奇点开始，通过一个连续映射 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 扩散成一个球面 S^2 ……不，考虑到重力和空气阻力，这其实是一个从切丛（Tangent Bundle）到流形的流（Flow）。”

千夏愣了一下，随即扑哧一声笑了出来，用团扇轻轻敲了一下凑的头。“你也太破坏气氛了吧！这种时候只要说‘好厉害’就行了啊。”

“但是，藤井，”凑转过头，认真地看着她，“你不觉得吗？那一瞬间的形状。虽然它转瞬即逝，但在它炸开的那个刹那，它维持了一个完美的拓扑结构。无论每个火药颗粒怎么飞，它们之间的相对关系——也就是同伦型——保持着某种守恒。”他伸出手，仿佛要抓住空中的虚影。“我们在地面上看到的，其实是那个高维结构在视网膜上的投影。就像我们试图用二维的纸张去理解高维的数学一样。”

千夏看着凑。周围是喧嚣的人群，是俗世的快乐。但凑站在那里，用他那双能透视结构的眼睛，在这个充满随机性的世界里寻找着秩序。“嗯。”千夏温柔地点头，“虽然我不懂切丛，但在

那一瞬间，那个‘完美的球体’确实存在过。你是想说这个吧？”凑有些不好意思地挠挠头：“大概是这个意思。”

10.4 河堤上的幽灵

不远处，葛城莲坐在河堤的草坪上，手里拿着一罐啤酒。他看着那两个并肩站立的少年少女，嘴角勾起一抹苦涩的笑。

“真刺眼啊，青春。”十年前，在波士顿的查尔斯河畔，他也曾和某个人（或许是 Gijs）讨论过类似的“无聊问题”。那时他以为自己能摘下数学皇冠上的明珠。现在，他只是个躲在防波堤阴影里的幽灵。

“葛城先生！”千夏挥着手跑过来，递给他一盒刚烤好的章鱼烧，“给，这是给老师的供品！”凑跟在后面，手里拿着两瓶波子汽水。

“你们俩，不去享受二人世界，跑来找我这个大叔干什么？”“因为是‘系员’嘛。”凑理所当然地说，“而且，关于刚才那个烟花的爆炸模型，我觉得可以用莫尔斯理论（Morse Theory）来解释临界点的变化……”

“停！”葛城头疼地揉了揉太阳穴，“今晚禁止说莫尔斯理论。今晚的主题是——”他从口袋里掏出几根未点燃的仙女棒，扔给他们。“——燃烧殆尽。”

三人蹲在河边，点燃了仙女棒。微弱的火花滋滋作响，照亮了三张脸庞。在这喧闹的夏夜，他们形成了一个奇妙的连通分量。虽然每个人都残缺不全，但在这个瞬间，他们是完整的。

11

单纯形萝卜与互为逆映射的救赎

11.1 夏末的提升与推出积

夏天结束了，蝉鸣声变得嘶哑而无力。特训进入了最残酷、也最抽象的深水区。葛城的公寓里，窗帘紧闭，黑板上不再是直观的几何图形，而是密密麻麻的交换图（Commutative Diagrams）。

“听着，凑。”葛城手里的粉笔在黑板上敲击出急促的节奏。“我们之前谈到了 Kan Fibration（坎纤维化），那是‘填充角’的能力。但在现代同伦论里，我们不仅仅关心单一的填充，我们关心的是——类态射在什么情况下能保持这种填充能力？”

他在黑板上画出了两个箭头 $i : A \rightarrow B$ 和 $p : X \rightarrow Y$ 。“这是一个战争。左边的 i 想要嵌入（Inject），右边的 p 想要纤维化（Project）。如果对于所有的交换图，中间的虚线箭头（Lift）都存在，我们就说 i 具有对 p 的左提升性质（Left Lifting Property, LLP）。”

凑咬着笔杆，眉头紧锁：“这就像是……无论 X 到 Y 的结构怎么坍缩， A 到 B 的扩张都能在 X 中找到对应的‘高维路径’？”

“不错。但现在问题升级了。”葛城在黑板上写下了更复杂的符号：

$$\square : \text{Morphisms}(\mathcal{C}) \times \text{Morphisms}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Morphisms}(\mathcal{C})$$

“Pushout Product（推出积）。”

葛城的声音变得严厉起来，仿佛在宣读一道咒语。“如果我们有两个态射 $i : A \rightarrow B$ 和 $j : K \rightarrow L$ ，它们的推出积 $i \square j$ 是一个从‘边界数据’到‘整体数据’的映射。”他画出了那个著名的立方体图表：

$$(A \times L) \cup_{A \times K} (B \times K) \longrightarrow B \times L$$

“现在，关键的问题来了。”葛城盯着凑的眼睛，“在什么情况下，如果我们把一个‘好’的态射（比如 Cofibration），乘上另一个态射，得到的结果仍然在那个‘饱和类’（Saturated Class）里？也就是说，它依然能保持‘提升’的能力？”

凑感觉大脑在燃烧。这是一个纯粹的组合拓扑问题。他需要在脑海中构建出高维的超立方体。“如果是单纯集（Simplicial Sets）……”凑喃喃自语，“这实际上是在问……如果我们把一个‘边界’（Boundary）和一个‘实心’（Solid）乘起来，得到的形状是不是还能被视为某种‘新的边界’？”

“去算！”葛城没有给提示，直接把一支粉笔扔给凑，“证明单态射（Monomorphisms）类在 Pushout Product 下是封闭的。证明 Anodyne Extensions（药同态射）类也是封闭的！”

接下来的三个小时，是死寂的。只有粉笔在黑板上疯狂摩擦的声音。凑的额头上渗出了细密的汗珠。他正在试图证明 Joyal's Pushout Product Axiom 的雏形。他需要构造具体的单纯映射，去检查每一个维度的单纯形是否退化。这是一场没有硝烟的肉搏战。

“不对……这里漏掉了退化算子（Degeneracy Operator）……”“如果乘上一个区间 $I = \Delta^1$ ……这就像给原来的障碍增加了一个时间维度……”凑的眼神逐渐变得狂热。他看到了。他看到了那个结构。当一个态射 i 遇到障碍无法 Lift 时，如果我们把它与另一个特定的态射 j 进行 Pushout Product，就像是给这个障碍加上了“把手”，或者把它置入了一个更大的语境中，原本无法逾越的鸿沟，突然就有了“同伦”的桥梁。

“我……找到了。”凑的手在颤抖，他在黑板上写下了最后的推导。

$$(i \square j) \in \text{LLP}(p) \iff i \in \text{LLP}(j \rightarrow p)$$

“这就是伴随（Adjunction）！提升问题的本质，就是映射空间（Mapping Space）的纤维化性质！”

“啪、啪、啪。”葛城靠在墙边，慢慢地鼓起了掌。“漂亮的推导。你刚刚触碰到了模型范畴（Model Category）的心脏。”

葛城看着满身粉笔灰、却兴奋得像个孩子的凑。“记住这种感觉，凑。在数学里，就像在人生

里一样。当你发现前面的路走不通（无法 Lift）时，不要死磕。试着去构造一个 Pushout Product —— 乘上一个新的维度，引入一个新的变量。在更高的维度里，障碍往往只是风景的一部分。”

凑喘着粗气，看着黑板上那个完美的交换图。他觉得自己刚刚翻越了一座看不见的高山。“谢谢您……葛城先生。”

11.2 关东煮的同构

“咔嚓”一声。门被推开了，晚秋的冷风夹杂着关东煮的香气涌了进来。“我说你们两个，”千夏提着保温桶站在门口，一脸无奈，“要把数学当饭吃吗？已经晚上九点了！”

“休息时间到！”千夏把保温桶重重地放在那张堆满草稿纸的桌子上，“你们两个疯子，已经连续思考了六个小时了。大脑会烧坏的。”千夏打开盖子，热气腾腾的关东煮香气瞬间填满了这个冰冷的房间。她熟练地夹起一块三角形的魔芋，放进葛城的碗里，又夹了一块圆柱形的萝卜给凑。

葛城看着碗里的魔芋，突然笑了。他用筷子戳了戳那个三角形的中心。“你看，凑。这是一个 2-simplex。”他咬掉魔芋的一个角，“现在它变成了一个 Horn（角），记作 Λ_0^2 。如果你能用魔芋把它补全……那就是 Kan Condition。”

凑盯着自己碗里的萝卜：“那这个萝卜就是…… $S^1 \times [0, 1]$ 的圆柱面？”“闭嘴，快吃。”千夏没好气地敲了敲两人的脑袋，“吃饭的时候禁止把食物拓扑化！这对萝卜很不尊重诶！”

房间里响起了久违的笑声。葛城喝了一口热汤，暖流顺着食道流进胃里，也流进了那颗早已干枯的心脏。他看着正在和千夏争论“魔芋到底是不是单纯形”的凑。

曾几何时，他以为自己的人生已经彻底终结了。但现在，看着眼前这个眼睛里闪烁着求知欲的少年，葛城感觉到了某种“逆映射”的存在。他教凑数学，是为了通过凑去看不曾看到的风景。但在这个过程中，凑那纯粹的热情、千夏那温暖的烟火气，正在一点点填补他灵魂上的空洞。

这不仅仅是单向的教导。这是一个双向的、同伦等价的救赎。

“葛城先生？”凑发现葛城在发呆。“没什么。”葛城放下筷子，掩饰性地擦了擦嘴，“吃完了就继续。今晚要讲 Small Object Argument。”“是！”

11.3 无限的休止符

夜深了，关东煮的热气散去，房间里重新被粉笔灰和严肃的空气填满。千夏坐在一旁，安静地帮他们整理着散落在榻榻米上的打印讲义。

葛城站在黑板前，正在讲解模型范畴中最核心的构造工具——**小对象论证**（Small Object Argument）。

“听好了，”葛城在黑板上画出一条不断延伸的链条，“为了构造我们需要的那种‘好的’纤维化映射，我们需要消灭掉所有的同伦群障碍。第一步，通过粘合细胞消灭 π_0 ；第二步，消灭 π_1 ……只要我们把这个过程一直做下去（Transfinite Composition），最后得到的空间就是我们想要的。”

凑盘腿坐在地上，听得如痴如醉。他在脑海里想象着那个几何体像肿瘤一样，通过不断的自我修补和增殖，最终进化成完美的形态。

“一直做下去？”

一个突兀的声音打破了沉寂。千夏手里拿着一叠刚理好的论文，眉头微皱，看着黑板上那个代表“无限过程”的省略号。

“一直做下去是指多久？”千夏问道，“如果这个修补的过程是无限的，总得有个尽头吧？就像生物进化一样，如果变异没有限制，那物种的定义就崩溃了。”

凑不假思索地回答：“只要取序列的极限（Colimit）就好了啊。在数学里，我们可以取无数次。”

“但是，”千夏指着讲义上一行不起眼的注脚，“我在图书馆看过罗素悖论的故事。如果你们构造的这个‘修补过程’跑得比‘集合’还要快呢？如果在这个过程中涉及到的细胞数量，超过了你们定义的那个……叫什么来着？基数（Cardinal）？”

“如果它无限膨胀，直到撑破了这个宇宙的容器呢？”千夏的眼神里有一种近乎直觉的敏锐，“就像你不能把装满水的杯子放进水本身里一样。”

房间里的空气凝固了。凑愣住了，他张了张嘴，却发现自己无法反驳。他只关心“能修补”，却从未关心过“修补的材料够不够”。

葛城猛地转过身，死死盯着千夏。几秒钟后，他深深地吸了一口烟，嘴角扬起一抹复杂的笑意。

“喂，凑。你捡到的这个‘经理’，不得了啊。”

葛城走到黑板前，擦掉了一部分图形，重重地写下了希腊字母： κ 。

“她说得对。”葛城的声音变得低沉而严肃，“小对象论证的核心，不在于几何粘合，而在于集合论的控制。”

“我们需要选择一个足够大的**正则基数**（Regular Cardinal） κ 。我们必须保证，所有的波（同伦群）都在这个 κ 的范围内收敛。如果这个修补过程超过了 κ 的容纳范围，整个构造就会崩塌。”

葛城看着凑，粉笔点在那个 κ 上：“没有这个限制，几何就是一团乱麻。凑，你只看到了生长，但千夏看到了边界。”

凑低下头，看着自己的笔记。他一直以为数学是关于“自由”的学科，但今天，他第一次意识到，在自由的背后，是冷酷的“界限”在支撑着一切。

千夏在一旁小声嘀咕着继续整理文件：“果然。数学家所谓的‘任意’，其实都是小心翼翼的‘特许’嘛。就像细胞分裂必须要有端粒酶作为限制一样。没有限制的增长是癌症，不是生命。”

12

象牙塔的审判

12.1 来自“正途”的访客

十二月。冬日的阳光惨白无力。葛城莲的公寓再次迎来了访客。但这一次，没有关东煮的香气，只有一股令人窒息的高级古龙水味和皮革公文包的肃穆感。站在门口的是坂本教授。东京大学数理科学研究科的泰斗，也是葛城在去哈佛之前的恩师。他穿着剪裁得体的深蓝色西装，头发梳得一丝不苟，与这个满地垃圾的房间形成了惨烈的对比。“坂本老师……”葛城下意识地把脚边的一罐啤酒踢到沙发底下，像个做错事的小学生。坂本教授没有脱鞋，他站在玄关，目光如手术刀般扫过这个颓废的空间，最后落在葛城那张胡子拉碴的脸上。“这就是你的‘思考室’吗，葛城？我在东大的办公室给你留了一年。一年了，你就在这里腐烂？”他把一盒高级哈密瓜放在杂乱的鞋柜上。“回来吧。现在重新回到坂本研读博士还不晚。即使你不做 Spectral Algebraic Geometry，做做经典的代数几何，我也可以保你毕业后一个教职。”这是招安。是来自光鲜亮丽的学术界的救援绳索。

12.2 危险的笔记

葛城刚想用惯用的自嘲把话题混过去，坂本教授的目光突然凝固了。他看到了书桌上摊开的一本笔记。那不是葛城的字迹。那字迹还带着少年的稚嫩，但笔触坚定有力。坂本教授走过去，

不顾葛城的阻拦，拿起了那本笔记。翻开第一页。

Definition: A quasicategory is a simplicial set K satisfying the inner horn filling condition...

坂本的手指停住了。他快速地向后翻。Kan Complex, Simplicial Homotopy Groups, Left Fibration ……每一页都写满了密密麻麻的推导和理解。有些地方还有红笔的批注（那是葛城的字），指出了证明中的微妙漏洞。“这是谁写的？”坂本的声音变了。不再是刚才的居高临下，而是带着一丝难以置信的颤抖，“这不是你的字。而且这种这种稚嫩的笔触……但这内容……”“是一个……朋友。”葛城含糊其辞。“别撒谎！”坂本猛地转过身，镜片闪着寒光，“这是初学者的笔迹，但他在试图从零开始构建 Higher Topos 的直觉。这是哪来的研究生？不，哪个研究生会有这种狂气？”“是个高中生。”葛城叹了口气，靠在墙上，“这所学校的学生。”

12.3 暴怒的理性

坂本教授愣了足足五秒钟。“高中生？”他重复了一遍，仿佛听到了什么荒谬的笑话。然后，他爆发了。“他在准备考大学吗？”坂本并没有赞叹，反而厉声问道。“他在……他在准备造海。”葛城试图用幽默化解，“他不想做那些无聊的计算题。”“荒谬！”坂本把笔记重重地摔在桌子上。那一声巨响让葛城抖了一下。“葛城，你在干什么？你在毁了他！”坂本指着那本笔记，手指气得发抖：“这个孩子有天赋。我只看这几页就能看出来，他的思维极其敏锐，能在这种年纪理解单纯集，他是天才。正因为他是天才，他现在最应该做的，是去刷微积分，去背单词，去拿满分，然后堂堂正正地考进东大理一！”“进了东大，有无数的资源，有系统的训练，有原本就铺好的通往世界的路！”葛城抬起头，眼神冷了下来：“你是说那种让他把灵魂切碎了喂给考试的路吗？像我一样？”

12.4 寄生虫的指控

“别拿你自己的失败当借口！”坂本教授的声音尖锐得刺耳，“你是在找替身。你在哈佛逃跑了，你在 Lurie 面前吓破了胆，所以你躲回日本，找了一个不懂事的高中生，把你自己的梦想强加给他！”这句话像一把烧红的刀子，精准地插进了葛城心里最烂的那块肉里。“你这是自私！”坂本步步紧逼，“你教他这些有什么用？日本的高考考 ∞ -category 吗？如果不考上好大学，他连数学界的门票都拿不到！你是想让他变成和你一样的家里蹲吗？抱着一堆没人懂的

手稿，在这个发霉的房间里自慰？”“我是在教他真正的数学！”葛城吼了回去，脖子上的青筋暴起，“学校里教的那些是垃圾！是算术！他在那里窒息了，我只是给了他一口氧气！”“那是毒品！”坂本毫不退让，“你在让他对现实世界脱节。等他落榜了，等他发现这个社会不接受只有‘范畴直觉’却算不对积分的人时，你能负责吗？你能养他一辈子吗？”葛城张了张嘴，却发不出声音。现实的重力太大了。坂本说的每一个字都是对的。在这个国家，没有学历，才华就是诅咒。

12.5 留下的毒刺

坂本教授整理了一下领带，恢复了那副冷酷的精英面孔。他从公文包里拿出一张名片，压在那本笔记上。“如果这孩子真的像这本笔记里显示的那么有才华，把他交给我。”坂本冷冷地看着葛城，“让他停止这种无意义的‘学术过家家’。让他去考东大。我会亲自指导他。那才是对天才负责任的态度。”坂本走到门口，穿上鞋，最后回头看了一眼那个颓废的学生。“葛城，别做把孩子拖下水的幽灵。你已经溺死了，别再拉个垫背的。”门“砰”地一声关上了。房间里恢复了死寂。葛城看着桌上那本被摔得变了形的笔记，以及上面那张印着“东京大学教授”头衔的名片。那张名片像是一块墓碑，压在了他和凑刚刚搭建起来的小小乌托邦上。“自私者吗……”葛城苦笑，伸手去摸烟盒，手却抖得拿不住打火机。“也许你是对的，老师。我这种逃兵，有什么资格给别人指路呢？”

13

同伦断裂

13.1 只有计算的世界

第二天。凑兴冲冲地推开门。“葛城先生！找到了！那个 Lift（提升）……我找到构造了！”凑连鞋都没顾上脱好，急切地冲进房间。“只要我们利用摩尔路径空间（Moore Path Space）的性质，把这个角……”

他的声音戛然而止。房间里烟雾缭绕。葛城莲背对着他，坐在乱糟糟的沙发上，脚跷在茶几上，正在抽烟。旁边放着几罐已经喝空的廉价啤酒，电视机开着，正在播放着嘈杂的综艺节目——这是以前绝对禁止的噪音，因为会打扰思考。“葛城先生？”凑试探着叫了一声，挥手驱散眼前的二手烟，“您不是说……在这里抽烟会弄脏黑板吗？”

13.2 演技

葛城没有回头。他深深地吸了一口烟，让辛辣的烟雾在肺里以此来麻痹那种被撕裂的痛楚，然后缓缓吐出。“啊，是你啊。”葛城的声音听起来含糊、慵懒，透着一股令人作呕的颓废劲儿，“今天不用来了。回去吧。”“唉？”凑愣住了，他举起手中的笔记本，“可是，昨天我们说好了要讨论 Homotopy Coherent Nerve 的……”“那个啊，算了吧。”葛城终于转过头。他的眼神浑浊，眼皮耷拉着，那是凑从未见过的、属于真正的“废人”的眼神。他精心戴上了这副面具。“我腻了。”

葛城轻描淡写地说道，就像是在说这罐啤酒不好喝一样。凑眨了眨眼，大脑一片空白：“腻……腻了？可是您明明说单纯同伦论是通往……”“那是说着玩的。”葛城打断了他，抓起遥控器换了个台，音量调得更大了，“你也太当真了，小子。我就是一个无业游民，闲着无聊找个高中生打发时间而已。现在我的游戏打通关了，不想玩了。”他指了指门口。“你太吵了，挡着我看电视了。”

凑站在原地，手脚冰凉。他手里的笔记本——那本记录了他们无数个夜晚心血的笔记本——突然变得沉重无比。“您在……撒谎。”凑的声音在发抖，但他倔强地盯着葛城的后背，“您昨天看着黑板的时候，眼神不是这样的。您明明比谁都更渴望看到那个理论的完成！”“那是演戏！演戏懂吗？”葛城猛地站起来，踢翻了脚边的空啤酒罐。铝罐在地上发出刺耳的“哐当”声。他大步走到凑面前，居高临下地看着这个比自己矮半头的少年。他必须狠心，必须把话说到最绝，才能斩断这条线。“听着，濑名。坂本教授……不，有个聪明人刚才点醒了我。”葛城指着书桌上那堆高深的数学书，“搞这些东西，能让你考上东大吗？能让你拿到奖学金吗？能让你以后找个好工作吗？”凑难以置信地看着他：“您……您不是最讨厌那些吗？您不是说那是‘毫无灵魂的计算’吗？”“所以我才是这副德行啊！”葛城吼道，他的脸因为痛苦和伪装的愤怒而扭曲，“看看我！三十岁，没工作，住垃圾堆，靠父母的接济过活！这就是‘追求灵魂’的下场！你想变成我这样吗？”他一把夺过凑手里的哈佛笔记本。“别做梦了。这一套在现实世界行不通。去背你的英语单词，去刷你的微积分题。那才是你应该做的事。”他把笔记本随手扔进角落的废纸堆里。“这东西是毒药。别再碰了。”

13.3 提升受阻

空气凝固了。电视里综艺节目的笑声显得格外刺耳，像是在嘲笑这两个被现实碾压的灵魂。凑看着被扔在角落里的笔记本，又看着眼前这个变得陌生、市侩、充满了成年人那种令人作呕的“现实感”的男人。眼泪在眼眶里打转，但凑咬着牙，没有让它掉下来。这不是悲伤，是被背叛的愤怒。“我以为……”凑握紧了拳头，指甲嵌进肉里，“我以为您是不一样的。我以为在这个充满了‘核桃’和‘铁锤’的世界里，只有您懂大海。”葛城转过身，不敢看少年的眼睛。他的手在口袋里死死攥着那张东大教授的名片，指关节泛白。“我也只是个俗人。滚吧，去当个优等生。别再来烦我。”凑深吸了一口气。他没有去捡那本笔记。“我懂了。”少年的声音变得冷硬，像是某种东西彻底碎裂后剩下的锋利边缘。“打扰了。我不会再来了。”凑转身，拉开门。夜风灌了进来，吹散了满屋的烟味，也吹冷了最后一点温度。门“砰”的一声关上了。

13.4 遗忘函子

凑不知道自己是怎么走出那栋公寓的。他感觉身体里的某种东西断裂了。从那天起，濑名凑死掉了。活着的是一台名为“优等生”的机器。

“濑名，这道题用分部积分法怎么解？”田中老师的点名不再带着那种随时准备挑刺的火药味，而是带着一种近乎讨好的期待。全班的目光都集中在濑名凑身上。凑站了起来。他的校服扣子扣到了最上面一颗，领带打得一丝不苟。他的眼神平静如水，或者说，像是一潭死水。并没有像以前那样在黑板上画出令人费解的交换图，也没有谈论什么“流形上的上同调”。他拿起粉笔，就像拿起一把手术刀。

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

三个步骤。标准格式。连中间的“令 $u = x, dv = e^x dx$ ”都写得清清楚楚，完全符合教学大纲的要求。没有多余的一笔，也没有任何属于个人的灵气。“完美。”田中老师满意地点头，脸上笑开了花，“大家看，这就是标准的解题步骤！濑名最近终于开窍了，模考的偏差值已经全校第一了。”掌声稀稀拉拉地响起来。那是混杂着羡慕、嫉妒和疏离的掌声。凑面无表情地放下粉笔，坐回座位。他感觉自己变成了一个 *Forgetful Functor*（遗忘函子）。在这个函子的作用下，原本丰富多彩的代数结构（他的热情、直觉、对真理的渴望）被全部剥离，只剩下了一个名为“优等生”的底层集合（Underlying Set）。他听不到海浪的声音了。只剩下铁锤敲击核桃的、枯燥的机械声。

14

锚点

14.1 天台的牛奶

午休时间，寒风凛冽的天台。凑一个人坐在长椅上，机械地背诵着英语单词。“abandon, ability, abnormal...”

一只手伸过来，递给他一盒温热的牛奶。是千夏。她没有说话，只是静静地坐在他身边。

“你也觉得我很可笑吧。”凑合上单词书，自嘲地笑笑，“以前说的那些‘大海’、‘范畴’，在现实面前不堪一击。我还是得乖乖地做这种无聊的填空题。”

千夏转过头，看着他。在这个失去了光彩的少年眼里，她看到了深深的空洞。“不可笑。”千夏轻声说。“虽然我不懂那些公式，但我知道，那个会在黑板前手舞足蹈、眼睛里闪着光的濑名君，才是真正的你。”

她伸出手，轻轻握住凑冰凉的手。“如果你累了，就在这里休息一会儿。不用去想什么大海，也不用去想什么考试。我就在这里。”

凑低下头，看着那只温暖的手。在这个被切断了所有联系（Morphism）的孤独世界里，千夏是唯一的锚点（Anchor）。如果没有她，他觉得自己可能会彻底消散在虚无中。“谢谢你……藤井。”

14.2 不再旁观

看着凑那张像死水一样平静、机械地背诵着单词的侧脸，千夏感到的不仅仅是心痛，更有一股难以抑制的、理性的怒火。

那是对一种逻辑谬误的愤怒。

那个叫葛城的男人，仅仅因为自己在哈佛的深渊里窒息过，就断定所有试图潜水的人都会溺死。他用自己的失败作为公理，强行推导出了凑也必然失败的结论。

“这是归纳法上的错误。”千夏在心里冷冷地想，“样本量只有 1（他自己），就敢否定无限的可能性。这根本不是导师该有的严谨，这是懦夫的傲慢。”

她看着凑。这个原本拥有独特“算法”的大脑，此刻正被强行格式化，去运行那些平庸的程序。在生物学上，这就叫逆向进化——把复杂的、特异化的结构，退化成简单的、同质化的结构。这是一种巨大的浪费。是对“可能性”的谋杀。

千夏握紧了拳头，指甲嵌进掌心。她不需要谁来定义她是“经理”还是“助手”。此刻，她是一个独立的观察者，而眼前的实验正在走向错误的终点。

“如果系统出现了致命的 Bug，”千夏对自己说，眼神变得锐利如刀，“那就不能指望系统自己恢复。必须引入外部变量。”

“葛城莲，既然你放弃了观察……”千夏站起身，挡住了天台的风，“那就由我来接手这个被你抛弃的样本。我会证明，你的推导是错的。”

15

葛城的忏悔

15.1 垃圾堆里的独角戏

葛城已经三天没有出门了。房间里充满了腐烂的味道。他躺在旧杂志堆里，盯着天花板上的霉斑发呆。

赶走凑的那一刻，他以为自己会感到解脱。毕竟，他“拯救”了那个孩子，让他回到了正轨。但为什么，心里空得像被挖去了一块？

他翻身坐起，视线落在了角落的垃圾桶里。那本黑色的哈佛笔记静静地躺在那里，沾染了酒渍。葛城鬼使神差地爬过去，把它捡了起来。

翻开笔记。每一页，都有两种笔迹。一种是他自己潦草、狂乱的笔迹，那是他在哈佛时留下的绝望。另一种是凑工整、稚嫩，但充满灵气的笔迹，那是凑试图理解他、试图修补他的痕迹。

Maybe we can view the Horn filling as a healing process...

这是凑写在边角的一句话。

15.2 数学的初恋

眼泪突然夺眶而出。葛城想起了自己高中时的样子。那时的他，也是这样狂热地爱着数学。不是为了考东大，不是为了拿菲尔兹奖，仅仅是因为——仅仅是因为看到欧拉公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 时，那种灵魂颤栗的感动。

“我到底在干什么啊……”葛城抱着笔记本，蜷缩在地板上。“我因为在哈佛受了挫，就否定了自己的一切。现在，我又要把这种恐惧传染给那个孩子吗？”“什么正途，什么现实……如果失去了那份爱，就算考上东大，也不过是制造了另一个像我一样的行尸走肉罢了。”

15.3 经理的铁拳

“砰！砰！砰！”砸门声打断了他的忏悔。千夏冲了进来。她没有废话，直接揪住葛城的衣领——虽然她比他矮得多，但气势上完全碾压。

“别躲在洞里装死了！”千夏眼眶通红，“你知道濑名现在是什么样子吗？他就像个死人！他连笑都不会了！”“那才是……对他好……”葛城嗫嚅着。

“放屁！”千夏罕见地爆了粗口，“你是个胆小鬼！你自己逃跑了，所以你也逼着他逃跑！如果你真的觉得那是‘正途’，那你为什么在哭？”

葛城摸了摸脸，全是泪水。“听着，大叔。”千夏松开手，指着黑板，“离高考还有两个月。如果你还想赎罪，就把那个会发光的濑名凑还给我！别让他一个人去战斗！”

葛城看着千夏，又看了看怀里的笔记。他深吸了一口气，眼神中的浑浊一点点褪去。“是啊……不能让他一个人。”他站起身，擦掉眼泪，抓起那半截粉笔。“既然是我把他推下去的……我就得负责把他再拉上来。”

16

南锡的流放与具体的彼岸

16.1 旧校舍的重逢

旧校舍，地理准备室。凑正准备收拾东西离开，门开了。黑板被擦得干干净净。葛城莲站在那里，刮掉了胡子，眼神清明。

“葛城先生……”凑的声音有些发颤。“坐下。”葛城没有道歉，也没有解释。他在黑板上写下了三个地名：**Paris (ENS), Nancy, The Rising Sea.**

“凑，我之前跟你讲过格罗滕迪克造海的故事。但我没讲全。”葛城转过身，声音沉稳有力。“1948年，格罗滕迪克去了巴黎高师 (ENS)。那是当时世界数学的中心。他在那里参加了亨利·嘉当 (Henri Cartan) 的讨论班。”

葛城在 Paris 下面画了个大大的叉。“他失败了。彻底的失败。他听不懂嘉当在说什么。那些关于李群、关于层上同调的复杂理论，对他来说就像天书。因为他缺乏基础。他就像现在的你一样，只有宏大的直觉，却不懂‘具体的语言’。”

凑愣住了。那个神一样的格罗滕迪克，也曾听不懂课？

16.2 流放南锡

“那是他最痛苦的时期。就像现在的你。”葛城指向第二个词 **Nancy**。“为了拯救他，他的导师建议他离开巴黎，去南锡大学。去跟随 Laurent Schwartz 和 Jean Dieudonné。”

“你知道他在那里做了什么吗？”葛城盯着凑的眼睛。“Dieudonné 是个极其严厉、注重具体计算的‘暴君’。他逼着格罗滕迪克去啃泛函分析中最枯燥、最具体的硬骨头。他逼着格罗滕迪克去计算具体的积分，去处理具体的空间。”

“格罗滕迪克没有逃避。他在南锡待了几年，把那些‘具体的脏活’全部干了一遍。正是这些看似枯燥的基础训练，为他后来构建庞大的代数几何帝国打下了地基。”

16.3 释然与觉醒

葛城走到凑的面前，按住他的肩膀。“凑，现在的高中，现在的备考，就是你的‘南锡’。”

“你厌恶的三角函数，你觉得丑陋的解析几何，那些都不是垃圾。它们是 Dieudonné 给你的试炼。它们是具体的砖块。”“如果你连这些具体的砖块都搬不动，你怎么去造海？Rising Sea 不是凭空升起的，它需要坚实的大地作为河床。”

凑看着黑板上的 **Nancy**，脑海中那个一直与其对抗的“应试教育”的怪物，突然变了模样。它不再是阻挡真理的高墙，而是通往真理的阶梯。原来，计算不是为了迎合考试，而是为了磨练驾驭具体的刀锋。

“我懂了……”凑的眼泪流了下来，那是释然的泪水，“我一直在逃避。我以为我看不起计算是因为我高尚，其实……其实我只是害怕面对我不擅长的琐碎。”

“没错。”葛城笑了，那是师长对弟子的认可，“现在，回去拥抱那些枯燥的公式吧。把它们当成泛函分析来做。把高考当成你的南锡时期。”

“等你攻克了这座山，我会把 Jacob Lurie 没写完的 ∞ -Category，全部交给你。”

凑擦干眼泪，眼神重新变得清澈而坚定。“是！我会把它们全部吃下去的！”

17

无穷的深渊与新的海平线

17.1 降维打击

二月的东京，寒风刺骨。东京大学的考场内，空气绷紧得像是一根即将断裂的琴弦。只听得见铅笔在纸上摩擦的沙沙声，那是几千名考生正在用这三年的青春作为燃料，试图烧开那扇窄门。濑名凑坐在考场中央。他看着面前的数学试卷。要是以前的他，大概会冷笑着把试卷撕碎，或者在上面写满这道题在同调代数下的推广，然后以此羞辱出题人。但现在的他，心静如水。

【第一题：如图，求从点 $A(0,0)$ 到点 $B(n,n)$ 不经过对角线的所有路径数量。】凑的脑海中瞬间浮现出的不是排列组合的公式，而是一个 Quiver（箭图）。“这是一个自由范畴。我们在计算 Hom-set 的维数。不经过对角线……这是在计算 Catalan 数，也就是在寻找 Dyck Path 的一一对应。”他在脑海里构建了一个庞大的组合结构，将问题映射到希尔伯特空间的算子格上。然后，他轻轻呼出一口气，将这些宏大的结构折叠、压缩。他拿起铅笔，在答题纸上写下：“解：利用卡特兰数公式 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \dots \dots$ ”

【第三题：求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 围成的面积。】“切。”凑在心里轻笑。“求面积？不，这是在计算辛流形（Symplectic Manifold）上的体积形式的积分。这是一个平凡的纤维丛截面。”那些关于 De Rham 上同调的直觉在他的神经元里闪烁。他看到了形式（Forms）在流形上的流动。但他没有画流形。他写下：“解：设积分区间为 $[0, 1]$ ，定积分为 $\int_0^1 (x - x^2) dx \dots \dots$ ”

他像是一个精通十八般兵器的绝世高手，却手里拿着一把木剑在和小孩比划。每一道题，他

都在脑海里动用了“核武器”，然后小心翼翼地输出为“常规武器”。这是葛城教他的：控制。如果你能驾驭海啸，你也能用它来浇花。为了千夏，为了那个约定，他甘愿把大海装进杯子里。

17.2 千夏的战争

同一时间，另一个考场。

千夏正在与理科二类（生物/农学方向）的试卷搏斗。周围是笔尖摩擦纸张的沙沙声，空气中弥漫着干燥的紧张感。

她放弃了原本擅长的文科，选择了这条更为艰难的路。这并非仅仅是因为想追逐那个少年的背影——那种理由太单薄，支撑不了她在无数个深夜里去啃那些生涩的化学方程式。

她的目光落在最后一道大题上。那是关于 DNA 复制过程中冈崎片段（Okazaki fragments）连接的机制。

“DNA 聚合酶……连接酶……引物切除……”

千夏手中的笔停顿了一下。在凑的眼里，这或许只是一个枯燥的生化反应。但在她眼里，这是世界上最精妙的逻辑门。

之前的“基数”讨论再次浮现在脑海。数学家可以随意定义无限，但在培养皿里，在细胞核这微小的空间里，生命必须遵守严格的界限。一个碱基的错误配对，一个调控因子的失控，就会导致系统的崩塌（癌症）。

“真美啊。”

千夏咬着嘴唇，手心微微出汗，但眼神却异常明亮。

相比于凑所沉迷的那个可以随意拉伸、变形的拓扑世界，她更迷恋眼前这个充满限制、充满规则、容不得半点模糊的实体世界。她想要知道，在这团看似混沌的湿漉漉的有机物中，究竟是怎样的逻辑锁链锁住了“熵”，创造出了名为“生命”的奇迹。

她深吸一口气，提笔写下了答案。

“我也要出海。”她在心里对自己说，“但不是去凑的那片抽象的深海。我要去探索的，是这片由无数个具体的‘限制’所构成的、复杂的生命迷宫。”

17.3 赤门之春

四月。樱花盛开。著名的“赤门”在春日的阳光下显得格外庄严。濑名凑穿着崭新的西装，站在东京大学数理科学研究科的大楼前。他做到了。理科一类，数学系，高分录取。周围是熙熙攘攘的新生，每个人的脸上都写满了对未来的憧憬。凑深吸了一口带着樱花味的空气，感觉胸口那块压抑了半年的大石头终于落地了。

“这就是……正途的风景吗？”也不坏。至少，这里的空气里充满了智慧的味道。他没有去参加新生欢迎会，而是径直走向了数理楼的四楼。那是他从那张名片上背下来的地址。坂本研究室。

17.4 那个男人的归来

走到 402 室门口，凑停下了脚步。他有些紧张。这半年他一直在备考，完全断绝了和那边的联系。葛城先生还好吗？还在那个垃圾堆里酗酒吗？他深吸一口气，敲了敲门。“请进。”声音很熟悉，但又有些陌生。因为它清朗、有力，没有了那种宿醉的浑浊。

凑推开门。阳光洒满的办公室。书架上整整齐齐地码放着 Springer 的黄皮书。没有发霉的关东煮味，只有淡淡的咖啡香。在靠窗的办公桌前，坐着一个男人。他刮掉了那乱糟糟的胡子，穿着一件干净的白衬衫，虽然头发还是有点自然卷的凌乱，但整个人看起来年轻了十岁。他正对着电脑敲打着 LaTeX 代码，听到开门声，转过椅子。

凑的视线落在男人胸前的名牌上：【博士候选人（PhD Candidate）：葛城莲】

“葛……葛城老师？”凑瞪大了眼睛。葛城看着呆若木鸡的凑，嘴角扬起一个灿烂的、甚至带着点少年气的笑容。“哟，新人生。你迟到了。”“您……您怎么会在这里？您的家里蹲生活呢？”

“戒了。”葛城站起来，伸了个懒腰，“既然某个狂妄的小鬼都能考上东大，我这个当老师的要是还躲在被子里哭，岂不是太丢人了？我去求了坂本老师，签了卖身契，重新回来读博了。”他指了指桌上那叠厚厚的手稿。“而且，为了把你那个关于 H^n 的直觉严谨化，我可是写了整整一百页的预印本。等你入学了，这后续的工作还得你来做。”

17.5 驶向深渊

葛城走到办公室的黑板前。这块黑板比旧校舍的那块更大、更高级，擦得一尘不染。“还记得我们在那个发霉的房间里的最后一课吗？”葛城拿起粉笔。他在黑板上画下了一个三角形，去

掉了内部和一条边。

$$\Lambda_n^k$$

那是内角 (Inner Horn)。然后，他画出了那个著名的提升图表 (Lifting Diagram)。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

“对于所有的 $0 < k < n$ ，这个角都能被填充。”葛城写下了这个条件。“这就是 Infinity Category (无穷范畴) 的定义。在这里，结合律不再是相等的，而是同伦相干的。在这里，态射不再是静态的箭头，而是动态的空间。”

葛城转过身，粉笔灰在阳光下飞舞，就像是海面上的浪花。他的笑容里依然带着那种狂气，但那是属于探索者的狂气。

“凑，”葛城向门口的少年伸出手，“所谓的现实，所谓的考试，我们都通关了。”“现在，没有什么能阻挡我们了。”“来吧。带上你的直觉，带上你的愤怒，带上你的爱。”葛城指着黑板上那个深不见底的数学深渊。“让我们一起去往 ∞ -Category 的深渊吧。去看看那片没有人见过的、真正的海。”

凑看着那个笑容，眼眶湿润了。他想起了旧校舍的夕阳，想起了千夏的关东煮，想起了无数个孤独的夜晚。所有的弯路，所有的痛苦，都是为了这一刻的重逢。他放下书包，大步走向黑板，走向他的导师，走向他的战友。“是！葛城老师！”

18

两个世界

18.1 补欠合格的奇迹

时间倒回至放榜的那一天。本乡校区的布告栏前人头攒动。濑名凑几乎是瞬间就找到了自己的考号——理科一类的高分通过，这是理所当然的。但他没有庆祝，而是焦急地在密密麻麻的数字森林里搜索着另一个号码。

没有。没有。还是没有。

那一瞬间，凑感觉世界崩塌了一角。他原本准备好的一大堆关于“虽然我们都在东大但专业不同所以见面时间要规划好”的傲娇安慰台词，此刻全都卡在喉咙里，变成了一团苦涩的棉花。

就在他掏出手机，颤抖着不知道该如何拨通那个号码时，葛城莲的电话先打进来了。“喂，凑。你在看榜吗？”“葛城老师……千夏她……”“啊，我知道。她没在正榜上。”葛城的声音听起来带着一丝玩味，“但是，刚刚教务处那边有了消息。因为理科二类（生物/化学方向）有人放弃了入学资格——”

“藤井千夏，补欠合格。最后一名滑进去了。”

凑拿着手机，站在喧闹的人群中，看着头顶湛蓝得不像话的天空。他是个无神论者，是个只相信逻辑推导和结构主义的数学信徒。但那一刻，他长长地出了一口气。“葛城老师。”“嗯？”“连我都开始相信上帝了。”

18.2 象牙塔里的逃课生

四月的本乡校区，樱花瓣落满了安田讲堂前的石阶。对于刚刚经历过补欠合格惊魂的千夏来说，这里的每一寸空气都充满了“得救了”的香甜。但对于以理科一类顶尖成绩入学的濑名凑来说，大学课堂的第一周，就是幻灭的开始。

上午十点，阶梯教室。《解析学基础》的老教授正在黑板上缓慢地书写着关于实数完备性的证明。“……对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，存在 N ，使得……”

凑坐在最后一排，手中的自动铅笔在指尖飞快地旋转。“太慢了。”他小声嘀咕，眼神里充满了不耐烦，“用 Dedekind 分割或者柯西列的等价类定义完实数后，这些性质都是拓扑上的必然。为什么要花一整节课去纠结这些细枝末节的不等式？”

在他看来，这就像是用显微镜去观察一块砖头的纹理，而完全忽略了这块砖头是用来建造宏伟宫殿的。“无聊。没有数学上的显著性（Mathematical Significance）。”凑合上课本，那是他大一生活的常态——肆无忌惮地轻视基础课，跳过繁琐的步骤，直接追求“本质”。下课铃一响，他就像逃离监狱一样冲出教室，直奔数理科学研究科大楼。

18.3 402 室的 ∞ 直觉

推开 402 室的门，空气瞬间变了。这里混合着陈旧的书纸味、葛城的烟草味和浓郁的咖啡香。这里才是凑真正的大学。

“葛城老师！关于 Grothendieck 的那个构造……”葛城莲正翘着二腿坐在电脑前，屏幕上显示着 Jacob Lurie 在 Princeton (IAS) 的最新预印本。

“哟，逃课生来了。”葛城笑着指了指黑板，“今天我们来讲点刺激的。Straightening and Unstraightening（直化与反直化）。”

这一年，葛城的办公室成了凑的第二个家。甚至可以说，是第一个家。他在课余时间几乎都泡在这里。他们不再讨论数学本科的课程，而是直接在 ∞ -Category 的深海里潜行。

葛城在黑板上画出了单纯集（Simplicial Sets）之间复杂的映射图。“看，凑。当我们想要研究一个随底空间变化的族时，传统的方法是看纤维丛（Fiber Bundle）。但在无穷范畴里，我们有更优雅的对偶。”

$$\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Cat}_{\infty}) \simeq \text{Cart}(\mathcal{C})$$

“左边是函子，代表着‘赋值’；右边是笛卡尔纤维化，代表着‘几何投影’。Lurie 告诉我们，这两种看似完全不同的视角，在同伦的意义下是完全等价的。”

凑盯着那个等价符号，瞳孔微缩。他能看到那个图像——无数松散的数据流（Functor）在某种高维的引力下，瞬间坍缩成一个坚实、完美的几何结构（Fibration）。“这就像……”凑的手指在空中比划，“我们把原本弯曲、纠缠的纤维，强行‘拉直’了。信息没有丢失，但结构变得清晰可见。”

“Bingo。”葛城打了个响指，“这就是你的天赋，凑。你能直接‘看见’同伦相干性。对普通人来说那是噩梦般的代数结构，对你来说，那只是风景。”

19

第三者的统计学与排中律

19.1 无菌室里的人侵者

十一月的东京，天黑得越来越早。理科二类的生物统计实验室里，日光灯发出微弱的电流声，空气中弥漫着离心机运转后的焦糊味和乙醇的冷香。

千夏盯着电脑屏幕，双眼干涩得像是进了沙子。屏幕上的 R 语言代码跑出了一串刺眼的红色报错：Error: singular matrix 'a' in solve。“又发散了……”她烦躁地抓了抓头发，把一根断掉的自动铅笔芯狠狠按在草稿纸上。距离期末课题的 Deadline 只剩下三天了，如果这个模型跑不通，这门课的绩点就完了。

“需要帮忙吗？我看你对着那个协方差矩阵发呆很久了。”一个温润却带着一丝高高在上意味的声音从头顶传来。

高桥君。生物系的“王子”。他穿着一件剪裁得体白大褂，袖口甚至还要喷一点淡淡的古龙水，与周围那些穿着格子衬衫、头发油腻的男生格格不入。他没有等千夏回答，就自然地把手撑在了千夏的椅背上，身体微微前倾。这个姿势极具侵略性，仿佛将千夏圈进了他的领地。

“啊，高桥君。”千夏下意识地挺直了背，不动声色地把椅子往旁边挪了挪，避开了他身上那股过于精致的香气，“不用了。葛城老师说过，如果不亲自处理过数据的噪声，就听不到信号的声音。”

高桥的手僵在半空，随即无所谓地耸了耸肩。他顺势靠在旁边的实验台上，双手抱胸，居高

临下地看着千夏。“藤井，你总是这么倔强。其实有些弯路是没必要走的。”他的目光扫过千夏桌角那张贴着便利贴的合照——那是他们高中毕业那天的照片。照片里的凑穿着不合身的校服，一脸别扭地看着镜头，而千夏笑得灿烂，手里还拿着“数学系经理”的小牌子。

高桥发出了一声轻蔑的鼻息。“而且，我也很怀疑，你这么努力想要追趕的那个世界……真的值得吗？”

19.2 被定义的“丑陋”

“你什么意思？”千夏的手指停在了键盘上，声音冷了下来。

“我是说你的那位‘男朋友’，濑名凑。”高桥用一种近乎怜悯的语气说道，“我知道他在理学部挺出名的。一个沉迷于没人听得懂的符号、连话都说不利索的怪胎。听说他最近因为沉迷抽象理论，连基础课的作业都不怎么交？”

高桥俯下身，眼神里带着一种世俗精英特有的审视：“藤井，你也是优等生。你应该懂得‘择优录取’的生物学法则吧？你每天在这里熬夜做实验，他在干什么？在垃圾堆一样的402室里画他的圈圈？”“那种只会活在幻想里、连现实生活中的水电费都搞不清楚的废宅，能给你提供什么？情绪价值？还是未来的人脉？”

此时，实验室的后门被推开了一条缝。濑名凑提着一本厚重的《Higher Topos Theory》，浑身僵硬地站在走廊的阴影里。走廊里没有暖气，但他感觉全身的血液都在倒流。

他低头看了看自己：磨损的袖口，沾着粉笔灰的裤脚，还有那一头因为思考数学而抓得乱糟糟的头发。那一刻，高桥口中的“废宅”二字，像是一记重锤，狠狠砸碎了他作为“数学天才”的自尊。

“也许……他说得对。”凑握紧了门把手，指关节泛白。在那个光鲜亮丽的“现充”世界里，他的那些同调群、那些 ∞ -范畴，确实毫无购买力。

然而，就在他准备转身逃离这个让他窒息的现实时，实验室里传来了“啪”的一声巨响。千夏合上了笔记本电脑。

19.3 我的最优解

千夏站了起来。她比高桥矮了一个头，但在那一瞬间，她爆发出的气场让高桥下意识地后退了一步。

“高桥君，你现在的样子，真的很难看。”千夏的声音不再是平时的温和，而是带着金属般的质感。

“难看？我只是在陈述事实……”

“你不是在陈述事实，你是在展示你的狭隘。”千夏直视着高桥的眼睛，眼神锐利如刀，“你以为凑不懂现实？你错了。”“他在黑板上画出的每一个符号，都是为了触摸这个宇宙最本质的真理。他笨拙，是因为他不屑于在无聊的社交辞令上浪费算力。他不说漂亮话，是因为他只信仰绝对的真实。”

千夏向前一步，逼视着这个所谓的“王子”：“你觉得他是在画圈圈？在我眼里，他是在构建通往神明的阶梯。而你，高桥君，你即使穿着再昂贵的白大褂，你的灵魂也只是一个充满了世俗杂质的、无法收敛的发散级数。”

“因为搭讪被拒，就开始攻击女生的伴侣。试图通过贬低别人来证明自己的‘优越性’。”千夏冷笑了一声，那是凑从未见过的、充满攻击性的千夏：“这在逻辑上叫做‘人身攻击谬误’。在生物学上，这叫‘求偶失败后的无能狂怒’。”

“无论未来如何，濑名凑都是我的最优解。而你，连作为备选变量的资格都没有。”“现在，请你出去。我要做实验了。”

高桥的脸涨成了猪肝色，张口结舌了半天，最后愤恨地甩手离去。

门外的凑，靠在冰冷的墙壁上，大口大口地喘着气。眼眶发热，视线模糊。他一直以为千夏是需要他保护的“经理”，是那个不懂数学的文静女孩。但今天他才知道，为了维护他，她可以变成多么勇敢的战士。

“既然你这么相信我……”凑擦了擦眼角，看了一眼怀里那本高深的拓扑书，眼神从迷茫变得决绝。“那我怎么能让让你输在区区几行数据上？”

19.4 为了你的降维打击

两天后。402 室。空气中弥漫着高浓度的咖啡因味道。

葛城推门进来的时候，被眼前的景象吓了一跳。平时那个只会对着单纯形发呆、视应用数学为粪土的濑名凑，此刻正盘腿坐在地上，周围堆满了《高维概率论》、《随机矩阵理论》、《非参数统计》……

“喂，凑，你终于疯了吗？”葛城踢开一本《R 语言入门》，“你不是说统计学是‘用假设去凑答案的算术游戏’吗？怎么，准备向世俗投降了？”

凑头也不抬，手中的笔在草稿纸上飞速运算，发出沙沙的摩擦声。“千夏的数据遇到了维数灾难。如果不解决这个问题，她的期末课题就要挂了。”

“哦？”葛城挑了挑眉，靠在门框上，饶有兴致地看着这个满脸通红、正在硬啃那些“丑陋公式”的学生，“所以，为了女朋友，高贵的纯数学家愿意弄脏自己的手了？”

“少废话！”凑咬着牙，眼中布满血丝，将被红笔圈出来的 Wishart 矩阵狠狠地写在黑板上，“只要能帮到她，别说统计学，就算是去学怎么算账我也认了！葛城老师，快告诉我，在这个非高斯分布下，Marchenko-Pastur 定律的修正项到底怎么算？！”

葛城笑了。那是一种欣慰的笑。“不错嘛。终于有点‘人味’了。”葛城走过去，拿起粉笔，“看着，小子。所谓应用，并不是对理论的玷污。它是把理论这把刀，插进现实的泥土里。”

那三天，凑放下了高贵的无穷范畴。他像个最普通的工科男一样，计算着均值，推导着方差，在满是噪音的数据迷雾中，利用他在高维几何中锻炼出的直觉，寻找那条唯一的收敛路径。

19.5 静默的证明

周一的清晨，生物系实验室。千夏拖着疲惫的身体走进实验室。周末她试了十几次模型，依然是报错。Deadline 就在今晚，她甚至已经做好了去求教授给个及格分的心理准备。

然而，当她走到实验桌前时，发现桌上放着一本陌生的笔记本。翻开第一页。没有寒暄，没有废话。上面是凑那标志性的、工整得像印刷体一样的字迹：

Problem: Dimension(p) \gg Sample(n). Classic covariance matrix is singular. **Solution:** Spectral analysis of large random matrices.

接下来是密密麻麻的推导过程。他用几何的语言重构了统计模型，利用 Lasso 回归进行了变量选择，最后给出了几行优化后的 R 代码。

在笔记本的最后，写着一行小小的、甚至有点潦草的备注：“P.S. 我看了一下你的原始数据。那些噪点不是错误，那是拓扑结构的一部分。你的直觉是对的，别听那些庸才的废话。——M.S.”

千夏看着那些复杂的公式，眼泪一滴滴落在便利贴上。她知道，那个笨拙的家伙一定听到了那天的话。他没有冲进来打架，也没有自卑地逃跑，而是用他最擅长的方式——数学，给了她最有力的支撑。

当天下午，银杏大道。高桥经过千夏身边时，脸色铁青，冷哼了一声走开了。千夏连看都没看他一眼。她径直跑向不远处——那个躲在树后、假装看书其实书都拿倒了的笨拙身影。

凑正慌乱地试图把倒着的书转过来，结结巴巴地解释：“啊，那个……我刚好路过，顺便来看看这里的树叶分形结构……”

“傻瓜。”千夏眼含热泪，狠狠地抱住了他，把脸埋进他那件带着粉笔灰味道的毛衣里。“谁要听分形结构啊。”她抬起头，看着凑那双因为熬夜而有些浮肿的眼睛，露出了灿烂的笑容：“谢谢你，凑。谢谢你证明了……我的选择才是最优解。”

凑愣了一下，随即不好意思地挠了挠头，脸红到了耳根。“那是显然的（Trivial）。”他小声嘟囔着数学家的情话，“因为在我的公理体系里，你本来就是唯一的解。”

20

交换代数的迷雾与下降的梯子

“如果代数是骨骼，几何是血肉，那么同伦论就是灵魂。但只有灵魂的幽灵，是无法在物理世界行走的。”

——葛城莲，于 402 室的雨夜

20.1 普林斯顿的回响

大一结束前的那个梅雨季，东京仿佛被浸泡在一缸浑浊的温水里。空气潮湿得几乎能拧出水来，数理科学研究所走廊里的墙皮都在剥落。

但在 402 室里，气氛却干燥、炽热，甚至带着一丝电路过载般的火药味。

“不对！这里的同伦极限（Homotopy Limit）不能这么写！”

濑名凑站在黑板前，手里攥着半截粉笔，眼睛亮得吓人。他身上的衬衫因为汗水紧贴在背上，但他浑然不觉。“葛城老师，如果我们只是简单地取极限，高阶的相干性（Coherence）瞬间就丢了！Lurie 在《Higher Topos Theory》里提到的那个直化（Straightening）定理，本质上是在保证几何结构在‘拉直’的过程中不发生断裂！”

葛城莲坐在电脑前，十指在键盘上飞舞，敲击声如同急促的雨点，试图追赶上凑那如同机关枪一般的灵感。“慢点，慢点！你这小子，脑子转得太快了，嘴巴跟不上啊。”葛城额头上渗出了细密的汗珠，嘴里叼着的烟早已熄灭，但他完全顾不上点燃，“你是说，要在单纯集的几何实现

(Geometric Realization) 里, 寻找那个被隐藏的 ∞ -Operad 结构?”

“没错!” 凑猛地转身, 在黑板上画下了一个巨大的交换图, “这不仅仅是代数, 这是几何! 是那个被称为 ‘粘合’ (Gluing) 的过程在谱代数几何 (SAG) 里的投影!”

那一晚, 师徒二人像是在进行一场没有硝烟的战争。直到凌晨四点, 一封长达十二页的 PDF 文档终于定稿。

收件人: Jacob Lurie, Institute for Advanced Study (IAS), Princeton.

主题: On the Geometric Intuition behind Straightening over $(\infty, 1)$ -Topoi.

“发吗?” 葛城的手指悬在回车键上, 声音竟然有些微不可察的颤抖。那个邮箱地址对他来说不仅仅是一串字符。它是通往神殿的阶梯, 也是他当年逃离的噩梦。Jacob Lurie, 那个名字代表着绝对的权威, 代表着他年轻时因为恐惧而放弃的真理。

凑深吸了一口气, 看着屏幕上那些密密麻麻的公式。那是他和葛城无数个日夜的结晶, 是他们对真理最赤诚的献祭。

“发。” 凑的声音坚定, 没有一丝杂质, “我想让他听见。不仅仅是仰望, 我想……和他对话。”

点击发送。

那一瞬间, 窗外的雨停了。东京塔的灯光虽然已经熄灭, 但在凑的眼里, 整个世界都亮了。一种前所未有的畅快感电流般流过全身。他不再只是那个在神殿外跪拜的信徒, 他终于鼓起勇气, 向神明发出了自己的声音。

20.2 SAG 的高墙与失效的直觉

然而, 这股 “我已经触摸到真理” 的豪气, 只持续了不到一周。当凑怀着征服者的心态, 打开 Jacob Lurie 的另一部巨著《Spectral Algebraic Geometry》(SAG) 时, 现实给了他一记沉闷的重击。

他原本以为, SAG 既然建立在 ∞ -范畴之上, 那么依然会是他熟悉的拓扑乐园。但映入眼帘的, 却是另一番景象。

- “……一个谱概形 (Spectral Scheme) 是一个局部赋环空间, 其结构层满足……”
- “……对于平坦 (Flat) 态射的下降性质……”
- “……由幂零元 (Nilpotent) 定义的无限小邻域……”

凑趴在桌子上，脸贴着冰凉的桌面，感到一阵窒息。除湿机轰隆隆地响着，却抽不干他心里的挫败感。每一个单词——环、理想、模、张量积——他都在大一的《代数学基础》里学过。他知道什么是 Ideal (理想)，在书本上，那只是一个满足“吸收律”的子集。

但问题就在这里。在 SAG 里，Lurie 把这些他熟知的、枯燥的代数积木，搭建成了一种他完全陌生的几何形状。

“我不明白……”凑烦躁地抓乱了自己的头发，发出一声压抑的低吼，“为什么要在这么完美的 ∞ -Topos 里，还要硬塞进交换代数？我知道什么是 Ideal，它是核，是同态的影子。但在 Lurie 笔下，Ideal 变成了‘闭子概形’，变成了‘几何点’？甚至还要讨论什么 nilpotent thickening (幂零加厚)？”

他感觉自己像是一个精通了高维拓扑的飞行员，突然被按在地上，被迫去研究脚下的泥土是由什么化学成分组成的。他觉得这太琐碎，太“非本质”了，就像是有人在贝多芬的交响乐里混入了锯木头的声音。

葛城莲靠在旧沙发里，看着濒临崩溃的学生，眼神复杂。他吐出一口烟圈，仿佛看到了当年的自己。“因为你的脚下是空的，凑。”

葛城站起身，走到书架最底层，抽出一本封皮已经磨损变黄、边角卷起的薄书，随手扔到了凑的面前。书页间还夹杂着葛城当年的烟灰。

Atiyah-MacDonald, Introduction to Commutative Algebra.

“你只有同伦的直觉，你习惯了把一切都看作是‘软’的变形。你把 Ideal 看作是代数运算的副产物，但在代数几何里，**Ideal 是几何的骨架**。”

葛城指着那本书：“Lurie 默认他的读者已经把这本书吃了进去。你觉得 Ideal 只是个代数定义？那你知道 Prime Ideal (素理想) 为什么对应几何上的不可约分支吗？你知道 Maximal Ideal (极大理想) 为什么就是‘点’吗？不想搞清楚这些‘泥土’的成分，就别想在上面盖楼。去读，把你的代数直觉从‘运算’扭转到‘空间’上来。”

20.3 中山引理的“魔术戏法”

接下来的两周，402 室变成了刑讯室。东京的梅雨下得更大了，雨水顺着玻璃蜿蜒而下，像是一道道囚笼的栏杆，将凑困在这个充满了陈旧纸张气味的房间里。

凑被迫放下了他心爱的高维范畴，开始啃食这本枯燥的交换代数。他感到一种生理上的排斥，就像是被迫吞咽干燥的沙砾。

“这根本不是数学！这是文字游戏！”某天下午，凑终于爆发了。他把半截粉笔狠狠地砸向黑板，粉笔断裂，弹到了葛城的脚边。

黑板上写满了他刚刚推导完的 Nakayama Lemma (中山引理)。

$$M = \mathfrak{a}M \implies (1 + \alpha)M = 0, \quad \exists \alpha \in \mathfrak{a}$$

“老师，你看这个证明！”凑指着黑板上密密麻麻的行列式推导，手指因为用力而发白，声音因为愤怒而颤抖，“这在代数上当然是成立的，行列式技巧，Cayley-Hamilton 定理，我都懂。但这有什么意义？”

凑转过身，胸口剧烈起伏，眼神里充满了对这种“技巧”的轻蔑：“为了证明 $M = 0$ ，它像变魔术一样变出了一个 $(1 + \alpha)$ 的逆元。这完全是代数上的巧合 (Coincidence)！我看不到任何同伦论里那种自然的 (Natural)、函子性的美感。这就像是一个蹩脚的魔术师，从帽子里抓出一只兔子，却不告诉我兔子是从哪来的！”

他指着那些公式，就像指着一堆垃圾：“在 ∞ -范畴里，每一步推导都是泛性质 (Universal Property) 的必然结果，是像水流一样自然的。但这里……这里充满了人工雕琢的痕迹。这是在技术细节中迷失！”

葛城沉默地看着黑板。他理解凑的愤怒。凑能接受最疯狂的抽象，却无法忍受没有“几何图景”的计算。“我知道它看起来很像魔术。”葛城掐灭了烟头，声音低沉而沙哑，“但你现在看到的‘技巧’，其实是几何局部化的核心机制。没有这个 $(1 + \alpha)$ ，你就没法把几何体切开再粘回去。你现在觉得它丑，是因为你还没看到它背后的几何图景。忍着，把它算熟。”

“如果这就是代价，”凑倔强地把脸别向一边，看着窗外灰暗的天空，“那我宁愿一辈子只做纯拓扑。至少那里是干净的。”

20.4 来自伯克利的卫衣

僵局持续到了第三天。打破这种窒息气氛的，是一阵轻快的、毫无阴霾的敲门声。

坂本教授推门而入。他的身后，跟着一个与这间充满霉味和烟味的研究室格格不入的年轻人。那人看起来比凑大不了几岁，一头乱糟糟的卷发像是刚睡醒，鼻梁上架着一副复古圆框眼镜。他穿着一件领口磨破了的灰色卫衣，上面印着褪色的“Berkeley Math”字样。他的帆布鞋上沾满了东京的泥水，整个人却散发着一种加州阳光般的松弛感。

“葛城，凑。”坂本教授介绍道，语气里带着一丝难得的轻快，“这位是 Peter Haine。他是 MIT 的博士生，最近在伯克利做访问，顺路来东京看看。他对你们在搞的 ∞ -Topos 很感兴趣。”

“Hi there.” Peter 笑着挥了挥手，声音清亮。他径直走进房间，完全没有把自己当外人。他的目光扫过凌乱的书桌、堆满泡面桶的垃圾箱，最后定格在黑板上那行充满了怨气的 Nakayama 引理推导上。

“Whoa,” Peter 吹了个口哨，走到黑板前，推了推眼镜，嘴角上扬，“Nakayama Lemma? 看起来有人正在和经典的代数怪兽肉搏啊。”

凑有些尴尬地站起来，试图用身体挡住黑板，像是想藏起自己最狼狈的一面：“我只是觉得……它很丑陋。它是技巧，不是真理。”

“丑陋?” Peter 眨了眨眼，转过头看着凑，眼神里带着一种孩童般的好奇，“这也是一种观点。不过，也许是你除了戴上正确的眼镜。”

Peter 并没有擦掉凑的算式。他从口袋里掏出一支短短的粉笔，在那些复杂的代数符号旁边，画了一个简单的图形——一个圆柱体，投影到底部的圆盘上，但在中间某处，纤维似乎发生了变化。

“凑 (Minato)，对吧?” Peter 笑着说，“坂本教授说你的直觉像野兽一样敏锐。但在我眼里，现在的你像是个被困在迷宫里的孩子。”“你觉得它丑陋，是因为你把它看作了关于环 R 和模 M 的死板方程。但在我眼里……” Peter 的粉笔在黑板上轻轻敲击，发出清脆的响声，“交换代数不是计算。它是关于函子 (Functor) 的几何学。”

20.5 Flatness: 把代数变成电影

“函子?” 凑愣住了。这还是第一次有人用范畴论的术语来描述 Nakayama 引理。

“Yes. Functors.” Peter 的神情变得认真起来，他身上的那种松弛感消失了，取而代之的是数学家特有的专注，“你喜欢 ∞ -范畴，那你应该习惯用‘映射’和‘关系’来思考，而不是盯着元素看。”

Peter 在黑板上写下了两个大大的单词：

Flat (平坦) & Faithfully Flat (忠实平坦)

“在 Atiyah-MacDonald 那本书里，Flat 意味着张量积函子 $M \otimes_R -$ 保持正合序列 (Exact Sequence)。这听起来像是律师写的法律条文，枯燥乏味，对吧?”

凑用力地点了点头。就是这个定义，让他恶心了三天。

“但从几何上看，” Peter 的手在空中比划出一道优美的弧线，指着那个圆柱体，“Flat 意味着‘这一族几何对象是连续变化的’。”

“想象这是一个纤维丛 (Fiber Bundle)。底空间是 $Spec(R)$ ，纤维是 M_p 。” Peter 的声音带着一种奇异的节奏感，像是在讲故事，“当你沿着底空间移动时，Flatness 保证了纤维的‘形状’、‘大小’、‘维度’不会突然发生崩塌。”

“没有突变。没有断裂。它像电影胶片一样流畅。”Peter 猛地转过身，看着凑的眼睛：“Nakayama 引理不是魔术。它是在告诉你：如果你在一个点（局部）看到纤维消失了 ($M/\mathfrak{m}M = 0$)，而这个纤维又是‘几何上良好’的（有限生成），那么根据连续性，它必须在整个邻域内都消失。”

“那个 $1 + \alpha$ 的逆，” Peter 笑了，“就是把局部性质‘推’向整体的动力。它不是技巧，它是连续性的代数表达。”

凑张大了嘴巴。窗外的雨声似乎渐渐远去。原本死气沉沉的 $M = \mathfrak{a}M$ ，在他脑海里突然变成了一个动态的几何体。他仿佛看到了一束光在流形上移动，没有任何阴影和断层。“原来……那是连续性……”凑喃喃自语。

20.6 Descent：缝合破碎的世界

“这只是开胃菜。” Peter 并没有停下，他的兴致完全被调动起来了，“那……Faithfully Flat (忠实平坦) 呢？”

凑下意识地摇了摇头。

“Ah, that's the real magic.” Peter 的眼里闪烁着光芒，他在黑板上写下了一个映射： $f : Spec(B) \rightarrow Spec(A)$ 。

“代数上说，这是 $M \otimes_A B = 0 \implies M = 0$ 。这看起来像是句废话，对吧？它不‘杀掉’任何非零的信息。” Peter 突然提高音量：“但在几何上，这意味着这个映射是满射 (Surjective)。也就是说，这是一层覆盖 (Covering)。”

Peter 扔掉手里的小粉笔头，换了一支新的。他在黑板上画出了那个著名的图表，那是凑在 ∞ -范畴里见过无数次的单纯对象 (Simplicial Object)：

$$A \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A B \dots$$

“凑，你知道 Grothendieck 最伟大的洞见是什么吗？”“是 Topos ？”凑试探着问。“那是结

果。不仅如此。” Peter 用粉笔用力戳着黑板, “是 **Descent** (下降)。”

“下降理论告诉我们: 如果你有一个破碎的世界 (局部覆盖 B), 只要这个覆盖足够好 (Faithfully Flat), 你就可以把整体的几何对象 (比如向量丛、层) 切碎了, 扔到局部去研究。”

Peter 指着那个复杂的张量积序列: “看, 这个 $B \otimes_A B$ 。这不就是这一层覆盖的自相交吗? 这不就是 Cech 上同调里的 $U_i \cap U_j$ 吗?”

“Boom.” Peter 做了一个爆炸的手势, “这不就是你在同伦论里最喜欢的 Simplicial Object 吗?”

“交换代数里那些令人头秃的定理, Nakayama 也好, 平坦性也好, 其实都是为了支撑起这个下降序列。它们是保证几何体可以被 ‘局部化’ 再 ‘完美缝合’ 的物理定律。”

凑死死盯着那个序列。那种感觉就像是近视眼第一次戴上了度数合适的眼镜。世界瞬间清晰了。原本在他眼里支离破碎、充满了 “人工技巧” 的交换代数, 此刻在 Peter 的点拨下, 瞬间连成了一片。那些不等式、那些引理, 全都变成了几何结构上的螺丝和铆钉。它们不再是阻碍, 它们是通往 ∞ -Stack 的梯子。

“Rising Sea……” 凑的声音有些颤抖, 眼眶微微发热, “原来海平面是在这里上升的。代数只是几何的语法 (**Syntax**)。”

20.7 名古屋的指路人

雨不知什么时候停了。夕阳透过云层, 将 402 室照得通亮, 给空气中漂浮的灰尘镀上了一层金边。

Peter 看着凑发光的眼睛, 转头对一直沉默旁观的葛城笑了笑: “Ren, 这孩子很有天赋。他的直觉是纯几何的 (Geometric), 这在学代数的人里很少见。”

他从那一身旧卫衣的口袋里掏出一张皱巴巴的便签纸, 写下了一个名字。

“如果他想从这个角度去重学代数几何, 别让他读 Hartshorne 了。那对他来说太 ‘硬’ 了, 太强调代数簇的经典技巧。”

Peter 把便签递给葛城: “让他去读这个人的东西。或者, 直接去找他。”

葛城接过便签, 上面写着一个名字:

Lars Hesselholt

Nagoya University (名古屋大学)

“Lars 是拓扑循环同调 (TC) 的大师。” Peter 拍了拍凑的肩膀, 手掌温热有力, “他是这个世界上最懂得如何用**拓扑**的眼光看代数的人。如果你想读懂 Lurie 的 SAG, 你需要先理解他眼中的 Scheme。”

Peter 临走前, 走到门口又停下了脚步, 回头对凑说了一句, 眼神里带着一丝狡黠: “交换代数是座大山, 没错。但翻过去之后, 你看到的不只是代数。是 **Spectral Geometry** (谱几何) 的日出。”

20.8 葛城的极限

Peter Haine 像一阵加州的季风一样离开了。但 402 室里的气压, 却并没有因此恢复平静。

有了“下降理论”这把钥匙, 曾经困扰凑的交换代数迷雾消散了。他开始以一种令葛城感到恐怖的速度吞噬着相关的知识。为了让凑能真正接轨 Lurie 的 SAG, 他们必须重构代数几何的基础。

葛城避开了经典的、也是最稳妥的 Hartshorne 教材, 冒险选择了 Lars Hesselholt 的讲义——那是一条更为陡峭、充满荆棘的范畴论捷径。

一周后的午后。阳光洒在黑板上, 粉笔灰在光柱中飞舞。凑正在推导 Serre 的相交重数 (Intersection Multiplicity) 公式。

“如果我们把仿射概形看作是 Ring 的对偶范畴……”凑写字的速度越来越快, 仿佛手中的粉笔不是在写字, 而是在追赶思维的速度, “那么, 两个几何对象相交时, 高维信息的丢失发生在……”

突然, 凑停住了。他猛地转过头, 眼神里闪烁着一种近乎妖异的锐利光芒。“葛城老师, 我明白了。”

葛城正准备喝一口咖啡, 闻言愣了一下: “明白什么了? 关于维数判定吗?”

“不, 是更本质的东西!”凑指着黑板上那个断裂的地方, 语气兴奋得发颤, “这里的‘相交’, 在经典几何里是算不准的, 因为有挠 (Torsion)。但是! 如果我们进入派生范畴 (Derived Category), 把这些对象看作是复形 (Complex) ……”

凑抓起粉笔, 在黑板上重重地写下:

$$\chi(M, N) = \sum (-1)^i \text{length}(\text{Tor}_i^A(M, N))$$

“看！”凑画了一个箭头，直指同伦论的核心，“这不就是同伦群的交错和吗？原来 Serre 在几十年前定义的这个公式，其实就是在计算派生张量积的欧拉示性数！这根本不是巧合，这是同伦论在代数几何里的必然投影！”

“啪。”葛城手中的打火机掉在了地上。

他当然知道 Serre 的公式。他在研究生时期花了一个月去背诵它的证明，去理解其中的同调代数技巧，去搞清楚什么是正规序列 (Regular Sequence)。但是，凑只用了十分钟。而且，凑不是在“背诵”或“推导”。他是直接看见了。在凑的眼里，那个复杂的 Tor 群公式不是枯燥的算式，而是两个几何体在虚空中相撞时，因为振动而产生的完美回响。

葛城看着眼前这个兴奋得手舞足蹈的少年，张了张嘴，却发现喉咙干涩得发不出声音。手中的粉笔悬在半空，迟迟无法落下。

一种巨大的、无力的失落感像潮水般涌来，瞬间淹没了他。Peter Haine 说得对。这孩子的直觉是野兽级的。“这孩子……已经不是在跑了。他是在飞。”

葛城低头看着自己写满草稿的笔记本，那里面的推导步骤虽然严谨，但笨拙得像是在爬行。他意识到，自己这座名为“402 室”的小庙，哪怕拼尽全力，也快要装不下这尊正在觉醒的大佛了。他能教凑怎么走路，但他教不了凑怎么在云端跳舞。

20.9 给 Lars 的信

当晚，402 室只剩下葛城一个人。他没有开灯，只有电脑屏幕发出的幽冷蓝光照在他的脸上。烟灰缸里堆满了烟头，房间里弥漫着一种陈旧的烟草味和离别的气息。

他手里摩挲着那张 Peter Haine 留下的便签。*Lars Hesselholt.*

Lars 是他在名古屋大学访学时认识的老朋友，是当初指点过迷茫期葛城的前辈。如果说有谁能接住从这里飞出去的凑，他确实是最合适的人选。

葛城打开了邮箱，新建了一封邮件。收件人：Lars Hesselholt, Nagoya University.

手指在键盘上敲敲打打，写了又删，删了又写。承认自己的无能是痛苦的。特别是对于一个曾经也自诩为天才、心气极高的人来说。承认自己已经教不了这个学生了，就像是亲手剪断风筝的线。

但是，看着黑板上凑留下的那个漂亮的 Tor 公式，葛城知道，为了凑，他必须这么做。

“*Dear Lars,*”

“好久不见。我是 *Ren.*”

“Peter Haine 应该跟你提起过，但我还是要亲自写这封信。我的心情很复杂。我遇到了一个孩子，濑名凑。他是我这辈子见过的……最纯粹的原石。”

葛城停下来，点了一根烟，深吸一口，烟雾模糊了屏幕。

“他身上的光芒太强了，强到让我感到刺眼，甚至感到恐惧。我拼命地教他，想要把我知道的一切都塞给他。但我发现，我快要被掏空了。我的知识储备，我的直觉，已经跟不上他的速度了。”

“他像当年的我们一样渴望大海，但他比我们游得更快，潜得更深。我这间小小的研究室，对他来说已经变成了浅滩。如果继续把他困在这里，用我那些陈旧的知识束缚他，我会毁了他。”

“Lars，我知道你一直在寻找能继承你衣钵的人。这个暑假，能不能请你替我指引他一段路？带他去看看真正的深海是什么样子的。”

“拜托了。——Ren”

点击发送。邮件化作数据流，飞向了名古屋。

葛城靠在椅背上，长长地吐出了一口烟圈。看着烟圈在黑暗中慢慢消散，他感觉心里空荡荡的，像是失去了什么重要的东西，却又有一种释然的轻松。

这或许就是作为引路人的宿命。把火种点燃，然后看着它变成燎原的大火，烧向自己无法企及的远方。

“去吧，小子。”他对着虚空低语，像是在告别，又像是在祝福。“带着你的同伦眼，去把这些老家伙们吓一跳吧。”

21

名古屋的夏日祭

21.1 任性的请求

大一的梅雨季即将结束，东京的空气里开始弥漫着闷热的湿气。在去往食堂的路上，濑名凑的步伐显得格外沉重。他几次张口想说什么，又把话咽了回去，只是机械地踢着路边的小石子。

“凑？你怎么了？”千夏停下脚步，侧过头看着他，“从刚才开始就心不在焉的。是不是解析学的作业太难了？”

“不是……”凑深吸了一口气，仿佛是要做一个关乎生死的决定。他停在了一棵巨大的银杏树下，低着头，不敢看千夏的眼睛。“那个……千夏。关于暑假……”

“嗯？暑假怎么了？”千夏的眼睛亮了起来，“是要去镰仓看海吗？还是去北海道避暑？我都看好攻略了哦！”

凑的心脏猛地抽搐了一下。她的期待让他感到更加难以启齿。但他必须说。“对不起！我想去名古屋。”

“名古屋？”千夏愣了一下，显然这个地点完全不在她的“浪漫夏日计划”里，“去那里干什么？吃鸡翅吗？”

“那里有个叫 Lars Hesselholt 的教授。”凑的声音越来越小，像个做错事的孩子，“他是拓扑循环同调的大师。葛城老师推荐我去见他。我想……我想趁着暑假，去学习 Scheme Theory（概形理论）。”“我想知道，在算术的尽头，几何的形状到底是什么样子的。”

空气凝固了几秒。凑紧紧抓着裤缝，等待着预想中的失望、责备，甚至是争吵。明明是大学的第一个暑假，明明应该陪女朋友去海边放烟花，去水族馆看企鹅，结果他又一次自私地选择了数学。“对不起，我总是只考虑自己……”凑的声音有些更咽。

“噗。”一声没忍住的笑声打破了沉寂。凑惊讶地抬起头。千夏没有生气，反而捂着嘴，肩膀在微微颤抖。

“什么嘛，搞得这么严肃，我还以为你要说什么‘我们要分开了’之类的鬼话呢。”千夏伸出手，用力地揉了揉凑那原本就乱糟糟的头发，“原来只是想去名古屋搞学术合宿啊。”

“可是……我们的旅行……”

“那就去名古屋啊！”千夏双手叉腰，脸上露出了兴奋的红晕，“你以为我不知道吗？丰田市（Toyota City）就在爱知县诶！那可是丰田的大本营！”千夏的眼睛里闪烁着异样的光芒，那是凑从未见过的狂热：“那里有丰田产业技术纪念馆！可以看到最早的织布机怎么变成V8引擎的！我对那个超级感兴趣的！机械结构的咬合简直太迷人了！”

凑愣住了：“千……千夏？你是个车迷？”

“不仅仅是车，是对复杂的机械结构感兴趣啦。就像你喜欢数学结构一样。”千夏舔了舔嘴唇，眼神变得有些馋，“而且……名古屋的矢场猪排饭（Miso Katsu）可是我的最爱！浓郁的红味噌浇在酥脆的猪排上……啊，光是想都要流口水了。”

她一把挽住凑的胳膊，拉着还在发愣的他往前走：“既然是‘数学系’的强化合宿，经理当然要随行啦！我会监督你好好吃饭的。我现在就去订票，顺便查查那家猪排饭的排队攻略！”

凑看着身边这个步履轻快的女孩，心里的愧疚化作了一股暖流。她总是这样，用她特有的方式，把他的任性变成了两个人的冒险。

21.2 代数几何的吞噬者

名古屋大学，理学部大楼。这里的空气比东京更加燥热，蝉鸣声震耳欲聋。

Lars Hesselholt 的办公室里堆满了书，乱得很有葛城莲的风格。这位来自丹麦的数学家身材高大，留着络腮胡，眼神锐利得像是一头北欧的熊。他正端着一杯浓缩咖啡，上下打量着眼前这个略显拘谨的少年。

“Ren（葛城）给我的邮件里把你吹上了天。”Lars 的英语带着浓重的北欧口音，低沉而有压迫感，“他说你有着‘野兽般的直觉’。但在我这里，直觉如果不通过计算的检验，就是垃圾。”

Lars 随手从桌上拿起一支粉笔，抛给凑。“Don’t disappoint me, kid.（别让我失望，小子。）”

接下来的一个月，名古屋大学理学部的学生们见证了一个奇迹。或者是，一个怪物的诞生。凑仿佛不知疲倦。他每天早上八点准时出现在研讨室，直到深夜才离开。千夏每天中午会提着便当来找他，那是他一天中唯一放松的时刻。吃完饭，千夏会去参观她的博物馆，或者在图书馆看生物书，而凑则继续潜入数学的深海。

他以一种惊人的速度吞噬着 Scheme Theory。那些让普通研究生头疼欲裂的 Grothendieck 拓扑、平展上同调 (Étale Cohomology)，对凑来说不是晦涩的定义，而是母语。

“Wait.” 某天下午，Lars 正在黑板上讲解 Witt 向量的构造。凑突然打断了他。凑走到黑板前，拿起粉笔，在他画的那个复杂的交换图旁边，画了一个稍微不同的结构。“Lars 教授，如果我们把这个 Frobenius 算子看作是……某种流形上的‘时间演化’……”凑的眼睛里闪烁着狂热的光，“那么这个上同调的结构，是不是和拓扑循环同调 (TC) 是同构的？”

Lars 愣住了。他手里的咖啡杯停在半空，甚至忘记了喝。他看着黑板上那几行简洁的推导。那是跨越了代数与拓扑的惊人一跃。

“Analogy (类比) ……” Lars 喃喃自语。他放下咖啡杯，眼神变得复杂而震撼。“这让我想起了 Dustin Clausen。那个正在和 Scholze 一起重构数学的少年。你身上有他的影子。”

Lars 站起身，走到凑的身边，拍了拍那个沾满粉笔灰的瘦弱肩膀。“Ren 没撒谎。你确实是个怪物。” Lars 的嘴角扬起一抹欣赏的笑意，“我已经不再需要教你基础了，Sena。你的直觉是对的。去飞吧，别被旧的框架束缚住。”

21.3 提前的终点

原本计划一个半月的合宿，凑只用了一个月就完成了所有的课题。

八月初的午后，阳光刺眼。在名古屋大学那块巨大的黑板上，凑留下了最后一行算式。那是 Riemann–Roch 定理的一个极其现代、极其简洁的证明。他没有使用经典的繁琐计算，而是利用了导出范畴 (Derived Category) 的观点，让整个定理像水晶一样自然地显现出来。

这是他给 Lars 的答卷，也是给自己的成人礼。

“结束了。” 凑放下只有指甲盖大小的粉笔头，轻轻拍了拍手上的灰尘。他转头看向窗外。盛夏的蝉鸣依旧聒噪，但他心里的那个世界已经变得无比安静、清晰。

他掏出手机，看了一眼日期。离暑假结束还有半个月。“还有一个半月……” 凑低声自语。脑海里浮现出千夏这一个月来陪他吃便当的样子，浮现出她明明想去玩却为了不打扰他而一个人在图书馆发呆的样子。

“我是个笨蛋。”凑骂了自己一句。他不仅仅是数学家，他还是千夏的男朋友啊。

他打开订票软件，手指有些颤抖，但眼神无比坚定。这一次，不再是为了某种抽象的理论，而是为了那个具体的、爱着他的女孩。

输入目的地：Okinawa（冲绳），Naha Airport。数量：2人。时间：明天。

点击，支付，出票。

凑看着屏幕上的“出票成功”，嘴角终于扬起了一个从心底发出的笑容。那种笑容，比解出 Riemann–Roch 定理时还要灿烂。

“再见了，代数几何。”凑把手机塞回口袋，抓起书包冲出了实验室，“接下来，是属于经理的夏天。”

22

冲绳的流体力学

22.1 惊喜与变量突变

名古屋的合宿最后一天。夕阳将出租屋的榻榻米染成了金黄色。空气中弥漫着刚刚炸好的猪排和浓郁红味噌的香气。千夏提着两份沉甸甸的“矢场猪排饭”外卖，哼着歌推开了门。

“我回来啦！凑，今天的排队简直……”千夏的声音戛然而止。手里的外卖袋子“啪嗒”一声掉在了玄关上。

原本散落在房间各个角落的草稿纸、代数几何课本、还有那些写满 ∞ -Topos 的笔记本，全部不见了。取而代之的，是一个摆放得整整齐齐的行李箱。而房间中央，坐着一个戴着夸张的彩虹色飞行员墨镜、穿着花衬衫（虽然扣子扣错了）的男人。

濑名凑推了推鼻梁上那副明显不合脸型的墨镜，试图摆出一个他在电影里看过的“硬汉”造型。“收拾一下，经理。”凑酷酷地把一张打印好的电子机票拍在矮桌上，动作僵硬得像个机器人，“我们要进行空间转移了。”

“唉？”千夏捡起地上的猪排饭，大脑宕机，“回东京吗？可是 Lars 教授那边……”

“不。”凑伸出一根手指，在空中摇了摇，“不是回东京。是去 26 12 127 40。”他指着机票上的目的地代码：**OKA**。

“冲绳。那霸。”

“哈？！”千夏的尖叫声差点掀翻屋顶，“冲绳？！那个有海、有沙滩、有比基尼的冲绳？！”

凑一脸严肃地点头：“根据我的计算，你在名古屋摄入的味噌成分已经饱和。为了维持生态平衡，你需要补充大量的紫外线和海葡萄。还有……这是为了庆祝 Riemann-Roch 定理的证明。”

千夏看着眼前这个笨拙地想要给她惊喜的男人，眼眶突然红了。“笨蛋……”她扑哧一声笑了出来，“那我的防晒霜怎么办！还没买呢！”

22.2 黑潮之海的静谧

冲绳，美丽海水旅馆。巨大的“黑潮之海”水槽伫立在眼前。幽蓝色的光芒透过厚厚的亚克力玻璃洒在两人脸上，仿佛置身深海。

巨大的鲸鲨拖着笨重的身体，优雅地从头顶游过。鱼群像银色的风暴一样盘旋。周围是游客们的惊叹声，但在这一刻，世界仿佛是静止的。

凑仰着头，瞳孔里倒映着那蓝色的巨兽。即使面对如此壮丽的自然景观，他的大脑依然在无法控制地运转。“太完美了……”凑喃喃自语，“你看那个胸鳍的摆动幅度。它在利用卡门涡街 (Karman Vortex Street) 产生推力吗？不，更像是某种非线性的……”

他转过头，眼神狂热地看着千夏：“千夏，你觉不觉得鲸鲨的体表斑点分布，其实遵循着图灵斑图 (Turing Pattern) 的反应扩散方程？如果我们用偏微分方程组来模拟……”

话音未落，一勺冰凉的紫色物体堵住了他的嘴。是冲绳特产的红芋冰淇淋。

“闭嘴。”千夏笑眯眯地看着他，眼神里带着温柔的警告，“现在禁止解方程。看鱼。只许说‘哇’和‘好厉害’。”

凑艰难地咽下冰淇淋，那股甜味在舌尖化开。他看着千夏在蓝光下侧脸的剪影，那是比任何几何图形都要柔和的线条。“……哇。”凑乖乖地发出了感叹，“好厉害。”（虽然心里想的是：千夏吃冰淇淋的样子，比图灵斑图可爱多了。）

22.3 最佳选择：流体力学与羞耻心

那霸的翡翠海滩。阳光刺眼得让人睁不开眼，白色的沙滩延伸到视线的尽头。到处都是穿着鲜艳比基尼、身材火辣的游客。

千夏躲在更衣室里，死活不肯出来。“凑！你绝对是故意的！绝对是！”千夏羞愤的声音隔着门板传出来。

“快出来啊，经理。”凑穿着一条普通的沙滩裤，站在外面一脸无辜，“今天的日照角度正好，

海水温度 28 度，是下水的最佳时机。”

更衣室的门开了一条缝。千夏裹着一条巨大的浴巾，像个粽子一样挪了出来。她的脸红得像熟透的番茄，眼神里充满了杀气。“这就是你说的……‘精心准备’的泳衣？”

千夏猛地扯开浴巾。不是比基尼。不是可爱的荷叶边裙子。那是一件深蓝色的、连体的、没有任何装饰的、写着“2 年 B 组”风格的——**旧式学校泳装（死库水）**。

周围的游客投来了好奇的目光。在这片充满时尚气息的海滩上，这身装扮显眼得就像是穿越来的昭和时代女学生。

“濑名凑！！！”千夏羞愤欲死，恨不得挖个沙坑把自己埋了，“为什么是这个？！你是变态吗？！这里的大家穿的都是比基尼啊！”

凑推了推鼻梁上的墨镜，神情变得前所未有的严肃。他仿佛不是在看泳衣，而是在审视一篇发表在《Annals of Mathematics》上的论文。

“千夏，你听我解释。这是理性选择的结果。”凑伸出一根手指，开始了他的演讲：“首先，从流体力学的角度来看。比基尼的结构增加了不必要的湍流边界层。而这种连体式设计，能最大程度地贴合流线型，Minimize the drag coefficient（最小化阻力系数）。这能让你在水中的雷诺数（Reynolds Number）保持在最佳范围。”

“其次，从拓扑学的角度来看。”凑指了指千夏的腰部，“比基尼将人体表面分割成了不连通的区域。而这件泳衣，保持了你身体表面的单连通性（Simply Connectedness）。这在同伦论上是更稳定的结构，不容易在海浪的冲击下发生‘拓扑形变’（走光）。”

“综上所述，”凑一脸正经地总结道，“这是兼顾了动力学效率与拓扑稳定性的最优解。你应该感到高兴。”

一阵海风吹过。千夏的头发凌乱地飞舞。她看着眼前这个一本正经胡说八道的男人，终于忍不住了。

“我不听我不听！”千夏红着脸，弯腰掬起一捧海水，狠狠地泼在凑的脸上，“去你的雷诺数！去你的单连通！直男数学宅去死吧！！”

“咳咳……好咸……”凑被泼了一脸水，墨镜都歪了，却还在试图辩解，“但是千夏，根据伯努利原理……”

22.4 海平面的常数

闹够了，也游累了。夕阳西下，将整个海面染成了温柔的紫红色。两人并肩坐在沙滩上，身上披着未干的海水，手里拿着两罐冰镇的菠萝汁。

千夏还是穿着那件羞耻的学校泳装，但此刻她已经不在意了。因为这片海滩上，只有他们两个人。“呐，凑。”千夏看着远处归航的船只，轻声说道，“谢谢你带我来这里。”

凑转过头，看着她。夕阳在她的睫毛上跳跃。“其实……”凑低头看着手中的易拉罐，“我一直觉得很抱歉。在名古屋的这一个月，我把你一个人丢在一边。我总是在追逐那些看不见的世界，却忽略了身边的人。”

千夏笑了，把头轻轻靠在凑的肩膀上。“没关系啊。因为看着凑在黑板前发光的样子，我也觉得很幸福。只要你偶尔……像今天这样，回头看看我就好了。”

凑的心脏猛地收缩了一下。在这个充满了 ∞ -范畴、高阶同伦、以及各种变幻莫测的数学结构的世界里，一切都是变量，一切都在形变。但是，肩膀上这个温暖的重量，是真实的。

凑伸出手，轻轻握住了千夏的手。她的手很小，很软，指尖还带着海水微凉的温度。“千夏。”“嗯？”“在数学里，如果一个量在所有的坐标变换下都保持不变，我们称之为‘不变量’(Invariant)。”凑的声音很轻，被海浪声裹挟着，却清晰地钻进千夏的耳朵。“对我来说，这个世界充满了未知的变量。Lars 的评价、定理的证明、未来的去向……这些都在变。”

凑转过头，认真地注视着她的眼睛，墨镜早已摘下，那双眼睛里倒映着整个星空。“但你不一样。你是我生命中不可替代的常数。是这所有变换中，唯一确定的核。”

千夏愣住了。脸上的红晕比夕阳还要深。过了许久，她把头埋得更低了，声音闷闷的，却带着掩饰不住的笑意。“笨蛋……哪有人把女朋友比作常数的。太不浪漫了。”

“是吗？那……基底 (Basis)？”“闭嘴啦！看夕阳！”

海风吹过，卷起千夏的发丝，缠绕在凑的指尖。大一的夏天就这样结束了。他收获了代数几何的利剑，收获了Lars的认可。更重要的是，他确认了身边这个女孩，是他愿意用一生去求解的方程。

23

Epsilon 的复仇与普林斯顿的来信

23.1 便当与傲慢的函数

大二的秋天。东京大学数理科学研究科，402 室。正午的阳光洒在窗台上。凑正坐在葛城的对面，毫无形象地扒着饭。那是千夏早上做好的便当。厚蛋烧 (Tamagoyaki) 依然是完美的金黄色，切成了整齐的方块——虽然千夏不懂范畴，但她在摆盘上有一种天然的拓扑美感。

“太无聊了。”凑一边嚼着章鱼香肠，一边含糊不清地抱怨，“简直是在浪费生命。”

葛城正对着电脑屏幕修改博士论文，头也不抬：“又怎么了？大二的课程不是很充实吗？”

“充实个鬼！”凑愤愤地用筷子戳着米饭，“那个《实分析与复分析》，教授还在黑板上写那一长串的 $\epsilon - \delta$ 语言。那种东西只要定义好拓扑空间的邻域系，根本就是显然的 (Trivial)！为什么要花一整节课去证明一个在这个拓扑下本来就该收敛的级数？”

他咽下食物，继续输出暴论：“这就是格罗滕迪克最讨厌的‘铁锤’！明明有更本质的结构 (Filter convergence)，却非要用这种丑陋的不等式去硬算。这种分析学没有灵魂！”

葛城停下了敲键盘的手。他转过椅子，似笑非笑地看着眼前这个狂妄的大二学生。“所以呢？你的作业交了吗？”“那种作业，我最后十分钟随便写写就行了。”凑不屑一顾，“我最近在读 Jacob Lurie 的 *Spectral Algebraic Geometry*，那才是值得我花时间的东西。”

23.2 龟兔赛跑的现实版

“呵。”葛城发出了一声意味不明的轻笑。他拿起桌上的一份成绩单，轻轻扇了扇风。“濑名君，作为你的‘非官方导师’，我有义务提醒你一件事。”

葛城把那张纸拍在桌子上。“就在你整天抱怨分析学没有本质、统计学不是数学的时候……那个‘补欠合格’的藤井千夏，在《生物统计学》和《基础化学》上都拿了满分。”

凑愣了一下：“哈？千夏？她那么拼干嘛？”

“因为她尊重每一门学科的‘铁锤’。”葛城指着屏幕上的教务系统，“而你，天才濑名凑大人，因为在实分析作业里写了‘由一般拓扑性质显然可得’而被助教扣光了过程分。如果不考虑期末考，你现在的 GPA 只有 2.8。”“而藤井同学的 GPA 是 3.9。”

凑脸红了，梗着脖子反驳：“GPA 这种世俗的数字有什么意义？高斯会在乎 GPA 吗？格罗滕迪克会在乎吗？”

23.3 来自普林斯顿的判决书

“问得好。”葛城的表情突然变得严肃起来。那种戏谑消失了，取而代之的是一种猎人看到猎物落网时的狡黠。他慢条斯理地拉开抽屉，从里面拿出一个信封。

信封上印着一行让所有数学系学生心跳骤停的英文字母：**Institute for Advanced Study / Princeton University**

“前几天，坂本教授去普林斯顿开会，见到了那个男人——Jacob Lurie。”葛城晃了晃手里的信封。

凑手里的筷子“啪嗒”一声掉在了桌子上。“L……Lurie？你是说那个 Lurie？”

“他对你很有兴趣。因为那封信。”葛城抽出信纸，读了一段。

CORRESPONDENCE

To Prof. Sakamoto, ...Regarding the student Minato Sena mentioned by Katsuragi. If he truly possesses such intuition for ∞ -Topos, I would be delighted to guide him personally during his exchange semester...

凑猛地站起来，椅子发出刺耳的摩擦声。“我要去！我现在就去办手续！”那可是 Jacob Lurie！那是活着的传奇！是凑现在的精神图腾！

“坐下。”葛城冷冷地命令道。凑僵住了。

葛城把信纸折好，重新放回信封，然后用一种极其惋惜、极其欠揍的语气说道：“但是啊，濑名。坂本教授说了，东大的交换生名额，尤其是去普林斯顿这种顶级名校的……”葛城指了指电脑屏幕上那个惨不忍睹的 GPA 2.8。

“是严格按照 GPA 排序的。”“只有系里前 5% 的学生才有资格申请。而按照你现在的这个‘只要本质不要过程’的成绩……别说普林斯顿了，你连去隔壁早稻田交换都费劲。”

23.4 Epsilon 的耳光

空气凝固了。凑站在那里，瞳孔地震。他看着葛城手里那个近在咫尺、却又远在天边的信封。Jacob Lurie 的指导。通往数学最高殿堂的门票。竟然被一个个小小的、丑陋的、他平时根本看不起的 ϵ 给挡住了？

“哎呀，真是太可惜了。”葛城火上浇油地叹了口气，把信封随手扔在桌角，“明明 Lurie 先生都开口了。要是某个天才平时能稍微分一点点精力给‘无聊的分析学作业’，现在已经在订机票了吧。”

悔恨。巨大的、排山倒海的悔恨。凑现在的脑海里，不再是美妙的 ∞ -Category 交换图，而是那些被他当草稿纸扔掉的解析学作业。

“葛城老师！”凑双手撑在桌子上，面目狰狞，像是抓住了最后一根稻草，“这学期还没结束！期末考！如果我期末考拿满分，GPA 还能救回来吗？！”

葛城看着少年那张扭曲的脸，终于忍不住露出了满意的笑容。这小子，终于咬钩了。“那就要看你的表现了。”葛城指了指旁边的书架，“去吧，把那本《实分析与复分析》啃完。记住，我要看到每一个 ϵ 的寻找过程，每一个不等式的放缩。少一个步骤，你就和普林斯顿说再见吧。”

24

来自波恩的白色风暴

24.1 绝对零度的智力碾压

尽管有了 GPA 的压力，但凑内心深处对基础数学的轻视并没有完全消除。直到那个男人的出现。

十一月。东京大学数理科学研究科的大讲堂。空气干燥而沉闷，暖气片发出轻微的嗡嗡声。讲台上站着一个年轻人。他看起来太年轻了，甚至像个刚毕业的研究生。他穿着一件普通的深色圆领毛衣，袖口微微挽起，手里捏着半截粉笔。

Peter Scholze (彼得·舒尔策)。菲尔兹奖得主，波恩大学的年轻教授，被誉为当代算术几何的“莫扎特”。

但他给人的感觉不像莫扎特那样欢快。他的眼神游离在虚空之中，仿佛他注视的不是黑板上粗糙的颗粒，而是某种更高维度的、流动的实在。

“……传统的拓扑空间是‘多孔’的。” Scholze 的声音不大，语速也不快，带着一种德国人特有的冷静，却像冰水一样浇在所有人的神经上。“当我们试图把‘分析’(Analysis) 装进‘代数’(Algebra) 的容器里时，连续性就会像水一样从那些微不可见的缝隙里流走。这就是为什么拓扑阿贝尔群不能形成一个好的范畴。”

他在黑板上写下了这个词，粉笔灰簌簌落下，仿佛凝结成了某种实体。

CONDENSED MATHEMATICS

Traditional Topology is a sieve. We replace it with **Condensed Sets**.

\mathbb{R}_{cond} is a ring object.

Liquid Vector Spaces: Making Algebra wet.

濑名凑坐在第三排，感觉呼吸困难。喉咙里像是堵了一团棉花。他引以为傲的范畴论直觉，在这里遭受了前所未有的冲击。

Scholze 正在讲解 **Condensed Mathematics** (凝聚数学)。但他不是在推导公式，他是在进行一场外科手术。他为了修复拓扑代数中的病态行为，竟然把“拓扑空间”这个概念整个扔进了垃圾桶，用名为“凝聚集”的东西取而代之。

“看，这里的 Liquid Vector Spaces (液态向量空间) ……” Scholze 随手画了一个交换图，那线条流畅得仿佛真的在流动，“在 p -adic 的世界里，实数不再是离散的沙砾堆积。我们将代数结构‘液化’了。现在的代数能够完美地渗透进分析的每一个毛孔，没有摩擦，没有流失。”

凑死死盯着黑板。Scholze 不是在涨潮。他是在改变物质的“相”。他让干燥、脆硬的代数变得“湿润”了。那些冰冷的同调群，在他的粉笔下竟然呈现出了液态的张力，填补了实数轴上每一个微不可见的逻辑缝隙，将“离散”与“连续”完美地融合在了一起。

那种构造是如此的天才，如此的浑然天成，以至于凑感到一种深深的无力感。这不是“努力”能达到的境界。这是神来之笔。在这个比他大不了多少的德国人面前，凑感觉自己就像是一只试图理解流体力学的猴子——他只能看到水在流，却永远无法理解那背后的纳维-斯托克斯方程。

24.2 天才的义务

讲座结束了。凑失魂落魄地游荡到了葛城的办公室。

“被碾碎了？”葛城递给他一罐冰咖啡。“是怪物……”凑瘫坐在椅子上，“Scholze……他在重新定义数学的基础。而且他看起来那么轻松，就像是在呼吸一样。”

葛城打开了电脑上的一个网页。“Peter Scholze。你知道他读完本科和硕士用了多久吗？3 个学期完成本科，2 个学期完成硕士。”葛城伸出三个手指，“也就是说，正常人需要五六年才能走完的路，他一边喝着啤酒一边在两年半内跑完了。”

凑的瞳孔剧烈收缩。“这……这怎么可能？那些繁琐的课程，那些无聊的考试……”

“因为对他来说，那些东西不是阻碍，是常识。”葛城收敛了笑容，眼神变得锐利。“凑，你以为 Scholze 是跳过了基础吗？不。他是在极短的时间内，以极高的效率，完美地吞噬了所有的基础。你觉得他会因为觉得‘分析学太无聊’就不好好写作业吗？”

“不。他会用最快的速度把那些东西变成自己的血肉，然后踩着它们往上爬。”

葛城盯着凑的眼睛：“如果你想追上那个德国人的背影，去普林斯顿见识更广阔的世界……那就证明给我看。证明你有能力像他一样，把眼前这些‘无聊’的障碍，以最快的速度、最完美的姿态清理掉。”“真正的强者，不会被门槛绊倒。”

“我知道了。”凑站起身，拿起那罐冰咖啡，一口气喝干。冰冷的液体顺着喉咙流下，浇灭了浮躁，点燃了斗志。“不就是期末考吗。我要拿满分。为了证明我有资格站在那个起跑线上。”

25

图书馆的同调

25.1 期末周的静默

一月。期末考前的地狱周。东大综合图书馆，深夜十一点。空气中弥漫着高浓度的咖啡味和纸张的干燥气息。

凑和千夏面对面坐着，中间隔着两座书山。这一次，凑没有在看《Higher Topos Theory》，他面前摊开的是已经被翻烂的《实分析》和《微分几何》。他手边的草稿纸上，密密麻麻写满了关于一致收敛的 $\epsilon - \delta$ 推导，字迹工整得像印刷体。他不再跳步，不再用“Trivial”敷衍，而是像对待艺术品一样对待每一个不等式。

“呼……”凑揉了揉酸痛的太阳穴，抬起头。他对面，千夏正戴着防蓝光眼镜，死死盯着一本厚重的《分子生物学》。她在背诵复杂的细胞信号通路。“G 蛋白偶联受体……cAMP 通路……激活蛋白激酶 A……”她嘴里念念有词，一边在笔记本上画着各种酶的相互作用图，看起来痛苦不堪。

凑看着她。灯光洒在她的侧脸上，她的睫毛因为疲惫而微微颤抖，但眼神却无比坚定。虽然她学的生物学在凑看来充满了“不严谨的实验归纳”，但她那种全力以赴去理解这个世界的姿态，有着一种令人动容的结构美。

“呐，千夏。”凑轻声唤道。“嗯？”千夏没有抬头，“别吵，我在背三羧酸循环，断了就接不上了。”

“这杯咖啡给你。”凑把自己刚买的热拿铁推过去，“还有，我看你卡在这个受体结构很久了。”凑拿起笔在草稿纸上画了一个简单的拓扑模型：“其实，你可以不用死记硬背。这个受体的跨膜结构……从拓扑上看，就是一个穿过细胞膜七次的环面 (Torus) 的同伦形变。当配体结合时，它发生的不是随机的乱动，而是一种拓扑性质的改变——它的‘孔’的构型发生了变化，从而允许 G 蛋白嵌入。”

千夏愣愣地看着那个图。原本复杂的生物结构，被凑用几根线条勾勒出了本质。“……虽然听起来像是在胡扯，”千夏扑哧一声笑了，眉头的结解开了，“但好像突然变简单了。你把我的受体变成了甜甜圈。”

她白了凑一眼，但嘴角却带着温柔的笑意：“谢谢你的咖啡。但是请不要以为这样就能偷懒。快复习你的实分析！葛城老师说了，如果这次你拿不到满分，他真的会把你撕了的。”

25.2 消失的拓扑学

凑不说话，只是静静的看着千夏专注的侧脸。她的睫毛很长，思考时会微微皱眉。为了跟上东大的课程，她付出了比常人多倍的努力。她是“补欠合格”，是那个拼命追赶的人。而自己呢？

凑的手伸进书包，触碰到了那个夹层里的信封。那是葛城给他的，关于普林斯顿交换项目的资料。如果期末考顺利，他就要去美国了。去见 Jacob Lurie，去那个 ∞ -Category 的圣地。

只要一想到能和 Lurie 面对面讨论 Higher Topos，凑的灵魂都会兴奋得战栗。那意味着他将彻底潜入数学的深海。但是……这对千夏意味着什么？“对日本来说，我大概会像是失联了一样吧。”凑心想。他太了解自己了。一旦进入那个状态，他会忘记吃饭，忘记睡觉，当然也会忘记……回消息。

凑的视线移向千夏放在桌角的日历。**2月14日**被画了一个红色的圈。“啊……”凑的心脏猛地收缩了一下。情人节快到了。回顾交往以来，自己做过一件像样的男朋友该做的事吗？没有。全是千夏在付出。“我得告诉她。关于普林斯顿的事。”但看着千夏为了期末考焦头烂额的样子，话到了嘴边又咽了下去。

25.3 只有数学不会背叛（暂时）

“凑？你发什么呆？”千夏察觉到了异样的目光，“实分析的题很难吗？”

凑猛地回过神，掩饰性地抓起笔：“啊，没、没有！区区实分析而已！”为了掩盖内心的慌乱

和愧疚，凑强迫自己把注意力全部集中在面前的试卷上。既然不能辜负千夏，也不能辜负葛城，那就先把眼前的敌人杀光吧。

“写吧。”凑咬着牙，笔尖在纸上划出沙沙的声响，“把这些无聊的题目全杀光。拿到满分，拿到 GPA。”

只有变得足够强大（拿到名额），才有资格去选择未来。至于怎么面对千夏……凑偷偷瞄了一眼那个红圈的日期。“我也许……该准备一份像样的礼物了。”

25.4 完美机器的诞生

那一周，凑变成了一台精密的解题机器。他不再抱怨题目无聊。他把每一道计算题都看作是通往普林斯顿的一级台阶，是通往千夏未来的基石。

三月。葛城的研究室里，屏幕上跳出了濑名凑的大二学年成绩单。

GRADE REPORT	
实分析:	100 (S)
复分析:	100 (S)
微分几何:	100 (S)
代数学 II:	100 (S)
泛函分析:	99 (S)

“怪物啊……”葛城看着那份成绩单，特别是《微分几何》的试卷。在那道关于高斯-博内定理的证明题中，凑不仅给出了标准的微分形式证明，还在最后附注了它与单纯同调的联系。那简直是一件艺术品。

“我做到了。”凑坐在沙发上，黑眼圈很重，手里还捏着那本被翻烂了的分析书。“泛函分析那一分是因为我实在受不了算那个无聊的上界放缩，直接跳过了。但 GPA 足够了吧？”

葛城转过椅子，看着眼前这个已经脱胎换骨的学生。“足够了？不，你是系里的第一名。”

葛城拉开抽屉，拿出那个封存已久的信封，还有一个更正式的文件夹。“这是 Jacob Lurie 的推荐信副本。还有……”

葛城把那个印着东京大学校徽的文件夹推到凑面前。

CORRESPONDENCE

NOTIFICATION OF SELECTION

2020 年度海外派遣交换留学生（普林斯顿大学）

Candidate: Minato Sena

“恭喜你，濑名凑。”葛城的声音里带着难掩的骄傲，“你拿到了通往深渊的 VIP 门票。明年秋天，你要去新泽西州了。”

凑颤抖着手接过那份文件。那不仅仅是一张纸。那是 Jacob Lurie，是 ∞ -Category，是世界数学的最中心。“谢谢您……葛城老师。”凑的声音有些哽咽。

“别谢我。是你自己杀出来的。”葛城挥了挥手，“不过，在去美国之前，你还有个更大的难关要过。”葛城指了指日历。2 月 14 日。“这张机票，意味着你要把你的‘经理’一个人扔在东京一年。如果你处理不好这件事……哼哼，我想象不出后果。”

26

不动点定理与告白

26.1 异常的男朋友

情人节当晚。台场海滨公园。彩虹大桥的灯光倒映在东京湾的海面上，波光粼粼，浪漫得一塌糊涂。濑名凑穿着一身不自在的休闲西装（被葛城强行按着头去买的），身体僵硬地走在千夏身边。他不仅订了一家能看到夜景的法式餐厅，甚至还提前背下了“法式鹅肝”的法语发音。

“呐，凑。”千夏停下脚步，海风吹乱了她的头发，“你今天好奇怪。”“有、有吗？”凑心虚地移开视线，“我在做一个……正常的男朋友该做的事。”“你吃饭的时候一直在抖腿。而且，你右手一直在口袋里摸什么东西。是要给我礼物吗？”

26.2 错误的浪漫

凑的脸瞬间涨红了。被看穿了。他在口袋里紧紧攥着那个小盒子。那是他用奖学金买的一条项链，吊坠是一个莫比乌斯环——象征着没有正反面、无限循环的连接。但是，还有另一样东西在他的内袋里，那是普林斯顿的提名通知书。

“千夏，我……”凑深吸一口气。你是数学家。数学家不能容忍公理系统里的矛盾。你不能在这个浪漫的夜晚撒谎。

“那个……你知道布劳威尔不动点定理 (Brouwer Fixed Point Theorem) 吗?” 凑一开口，就恨不得咬断自己的舌头。在这个情人节，他竟然又开始讲数学了。

千夏愣了一下，扑哧一声笑了：“在情人节讲拓扑学？真有你的风格。说吧，那个定理怎么了？”

“就、就是说……如果你搅动一杯咖啡，总有一个点在搅动前后位置不变。” 凑语无伦次地比划着，“这半年，我在拼命复习，拼命考 GPA。我想去更远的地方，我想去见 Lurie，我想去把那些疯狂的数学搞清楚……”

他从内袋里掏出了那份折叠好的通知书，而不是项链。“千夏，我……我拿到普林斯顿的交换名额了。” 凑闭上眼睛，一口气喊了出来，“我要去美国一年！我要去搞数学了！对不起！”

26.3 经理的判决

死一般的寂静。只有海浪拍打岸边的声音。凑不敢睁眼。他搞砸了。彻彻底底搞砸了。在情人节告诉女朋友自己要出国一年，这简直是分手宣言。

“傻瓜。”一个温暖的触感贴上了他的脸颊。凑睁开眼。千夏站在他面前，踮着脚尖，双手捧着他的脸。她的眼眶红红的，但嘴角却挂着温柔的笑意。

“你以为我不知道吗？”千夏轻声说，“从你开始疯狂啃那本《实分析》开始，从葛城老师看你的眼神开始，我就知道了。你在准备起飞。”

“可是……我会消失一年。我们会有时差……”“濑名凑。”千夏打断了他，表情变得严肃，“我是‘数学系’的经理。经理的职责是什么？”“是……后勤？”“错。”千夏用手指戳了戳他的胸口，“是支持王牌选手去拿冠军。”

她从包里拿出一个包装精美的盒子，塞进凑的手里。“这是本命巧克力。虽然你是个只会算数的笨蛋，但我知道，如果你不去普林斯顿，如果你不去追逐那个 ∞ ，你就不是那个让我心动的濑名凑了。”

26.4 莫比乌斯之吻

“去吧。去那个深渊。”千夏的声音有些颤抖，“但是，你要答应我一个条件。”“什么条件？”“这就是你的‘不动点’。”千夏指着那个莫比乌斯环的项链（凑终于笨手笨脚地拿了出来）。

凑看着眼前的女孩。她比所有的数学公理都更真实，比所有的几何结构都更美丽。Scholze

的凝聚数学或许能修复拓扑的缺陷，但只有千夏，能修复他内心的空洞。

凑笨拙地把那条项链戴在千夏的脖子上。“我保证。”凑握住她的手，那个莫比乌斯环在两人的胸口闪闪发光。“就像这个环一样。无论怎么走，最后都会回到原点。我的原点就是你。”

在东京塔的灯光下，在海风的见证下，未来的大数学家终于做了一件比证明定理更勇敢的事。他低下头，吻上了那个一直守护着他的女孩。这是属于他们的、不可逆的态射。

27

幽灵的复活与具体的救赎

27.1 402 室的死与生

四月的东京，樱花已经落尽，换上了嫩绿的新叶。但数理科学研究科大楼的 402 室，却像是一个被时间遗忘的琥珀。

连续两个月了，这里的窗帘没有拉开过。空气中弥漫着一种令人窒息的混合气味：陈旧的烟草味、速溶咖啡挥发后的酸味、还有打印机墨粉受热后的焦糊味。

凑推开门的时候，差点被地上的书堆绊倒。那不是普通的书堆，而是像防御工事一样垒起来的复印纸。每一张纸上都密密麻麻地写满了算式，有的被揉成一团，有的被红笔狠狠地划掉了。

“葛城老师？”凑试探着喊了一声。

房间深处的阴影里，电脑屏幕发出幽幽的蓝光。葛城莲正蜷缩在那张甚至露出了海绵的旧转椅上。他胡子拉碴，眼窝深陷，原本总是梳得一丝不苟的头发此刻乱得像鸟窝。他手里捏着一支自动铅笔，正在对着一张草稿纸发呆。那只手——凑第一次注意到——在微微颤抖。不是因为寒冷，而是因为极度的亢奋与疲惫交织的生理反应。

“别吵。”葛城的声音沙哑得像是在砂纸上磨过，“我在解 Maurer-Cartan 方程的最后一项。”

凑屏住呼吸，轻手轻脚地放下便当。他从未见过这样的葛城。平时的葛城是游刃有余的，是戏谑的，是那个手里拿着高脚杯谈论 ∞ -范畴哲学的人。但现在的葛城，像是一头被逼到悬崖边的狼，正在用牙齿撕咬着名为“形变理论”的猎物。

黑板上写着一行醒目的公式：

$$dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0 \quad \in \quad H^2(X, T_X)$$

那是形变理论的核心。如果这个方程有解，几何结构就能“平滑地”移动；如果受阻 (Obstructed)，几何体就会在某个方向上突然崩塌。

“不对……还是不对……”葛城突然烦躁地把铅笔折断了，“谱序列在 E_2 页不收敛。一定有什么具体的算术性质我没看到。一定是那个素数 p 的行为……”

他不再是那个高高在上的指导者，此刻的他，只是一个在数学迷宫里撞得头破血流的凡人。

27.2 迟到了十年的满分答卷

三天后的午后。暴雨初歇，窗外的积水反射着刺眼的阳光。402 室的门被猛地推开了。

坂本教授站在门口。这位平时总是一脸严肃、甚至有些古板的老教授，此刻胸口剧烈起伏，手里紧紧攥着一份刚打印出来的预印本 (Preprint)。他的皮鞋上沾满了泥水，显然是一路跑过来的。

房间里死一般的寂静。葛城已经睡着了，趴在散乱的草稿纸堆里。听到开门声，他艰难地抬起头，眼神迷离了一瞬，随即聚焦在坂本教授手中的那叠纸上。

“醒醒，葛城。”坂本教授的声音在颤抖，他大步走到桌前，把那份论文重重地拍在桌子上。灰尘飞扬。

标题在阳光下清晰可见：*Unobstructedness of Calabi-Yau Deformations via Derived L-infinity Constraints*

“我找了普林斯顿的 Deligne，还有京都的森重文看过了。”坂本教授摘下起雾的眼镜，用手背擦了擦眼角，“他们说，这是十年来在复几何领域最干净、最漂亮的证明。”

凑站在一旁，大气都不敢出。他看到坂本教授那双布满皱纹的手，紧紧按在葛城的肩膀上，指关节因为用力而发白。

“十年了……”坂本教授的声音更咽了，“从你从哈佛逃回来的那天起，我就在这个房间里看着你。看着你假装颓废，看着你用哲学术语掩盖计算能力的缺失。我以为这辈子再也看不到那个才华横溢的‘疯狗’葛城了。”

“但是……”老人深吸了一口气，像是要把胸中的郁结全部吐出，“无障碍 (Unobstructed)。

你终于证明了你自己的人生也是无障碍的。”

葛城沉默了许久。他伸出满是墨迹的手，从烟盒里抖出最后一根烟，却怎么也打不着火。“老头子。”葛城低着头，刘海遮住了眼睛，声音轻得像烟雾，“我只是……不想在学生面前丢脸罢了。”

“这就是你给我的博士答辩吗？”坂本教授把那份论文摆正，“虽然迟到了十年，但我给你满分 (S)。”

27.3 我的塞尔 (Serre)

坂本教授离开后，房间里只剩下师徒二人。阳光斜斜地照在书桌上，空气中浮动的尘埃仿佛都在跳舞。

凑走上前，拿起了那份论文。他感觉手中沉甸甸的。他翻开正文。没有他想象中的那些玄之又玄的 ∞ -Category 哲学，没有那些用来吓唬人的高深概念。只有计算。一行接一行，如同手术刀般精准、冷酷、却又充满韵律感的代数计算。

葛城利用了 L_∞ -代数的同伦性质，但他没有停留在抽象层面。他真的跳进了泥坑，用具体的、繁琐的谱序列计算，硬生生把那个被称为“死结”的障碍项 (Obstruction Class) 给消解了。

“这简直是……”凑喃喃自语，“暴力美学。”

“很俗气对吧？”葛城终于点燃了那根烟，深深吸了一口，整个人瘫软在椅背上，仿佛被抽干了力气，“没有格罗滕迪克那种‘上帝视角’的宏大，只有像工匠一样敲敲打打。”

“不。”凑猛地抬起头，眼睛亮得惊人。他看着葛城，就像看着一座刚刚喷发完的火山。

“葛城老师，你知道我想到了什么吗？”凑指着论文第 12 页的一行关键不等式：“我看这篇论文，感觉就像是在读 Jean-Pierre Serre (塞尔) 的东西。”

葛城夹烟的手抖了一下，烟灰掉落在裤子上。他转过头，眼神复杂：“你这小子，捧杀我也要有个限度。那是塞尔，是数学之神手里的铁锤。”

“我是认真的。”凑放下论文，走到葛城面前，神情无比郑重。“这一年，你总是逼我算 ϵ ，逼我做那些无聊的分析题。我以前不服气，我觉得那是对天才的侮辱。”

凑指了指自己的脑袋，又指了指那篇论文：“但现在我懂了。如果有朝一日，我真的能像格罗滕迪克一样，去构建那些宏大的、如海水般的理论……那么，那些理论如果没有坚硬的岩石作为地基，就只是空想的泡沫。”

少年露出了一个灿烂的、不带一丝傲气的笑容：“如果我是格罗滕迪克，那你就是我的塞

尔。”“是你用这些‘Concrete Things’（具体之物），把我的幻想变成了可以落地的数学。”“没有你的铁锤，我的大海就会干涸。”

葛城愣住了。他看着眼前这个即将飞往普林斯顿的少年。一年前，这小子还是个只会把“Trivial”挂在嘴边的傲慢高中生。而现在，他懂得了敬畏，懂得了“具体”的重量。

一股酸涩而温暖的热流涌上葛城的眼眶。他慌乱地转过身，背对着凑，假装在书架上找东西。“切……少肉麻了。”他的声音带着浓浓的鼻音，“去了美国别给我丢人。那里的变态比这里多得多。”

27.4 最后的奖学金

一阵~~FF~~的翻找声后，葛城转过身，手里多了两个信封。他把信封甩在凑的怀里。

“拿着。”“这是什么？”“这篇论文的奖金，还有坂本老头给的项目经费。”葛城恢复了往日那种玩世不恭的笑容，虽然眼角的红晕还没褪去，“两张去巴黎的机票。往返。带酒店。”

凑瞪大了眼睛：“巴黎？为什么是巴黎？”

“去见见真正的塞尔。”葛城指了指窗外的天空，那是西方。“既然你承认我是你的‘塞尔’，那我就带你去认祖归宗。在去普林斯顿之前，我要带你去法兰西公学院。我要让你亲眼看看，那个把代数几何变成‘铁锤’的一百岁老头子，是用什么样的眼神看数学的。”

“而且……”葛城顿了顿，眼神变得柔和，“听说香榭丽舍大街的香水不错。你总得给藤井同学带点什么吧？把人家扔在日本一年，要是连个像样的礼物都没有，你这辈子都别想解开那个‘不动点’了。”

凑紧紧攥着那两个信封。那是通往圣地的门票，也是导师——不，是战友——最后的馈赠。

“是！葛城老师！”凑深深地鞠了一躬，久久没有起身。

窗外，夕阳将东京塔染成了金色。幽灵复活了。而少年，即将起飞。

28

不动点与巴黎的铁锤

28.1 Serre：作为工具的抽象

法兰西公学院的讲堂里，空气肃穆。这里没有喧哗，只有粉笔敲击黑板的笃笃声。

讲台上，一位年轻的学者正在激情澎湃地介绍一种新的、基于高阶范畴的“广义模形式”理论。他在黑板上画满了复杂的交换图，试图建立一个包罗万象的宏大框架。

“……通过引入这个无限层级的同伦极限，我们可以绕过经典的模空间紧化问题，直接定义……”

“请等一下。”第一排的阴影里，传来一个平静却不容置疑的声音。Jean-Pierre Serre（让-皮埃尔·塞尔）缓缓抬起头。

他没有像凑想象中那样愤怒地咆哮，也没有粗鲁地打断。他的表情甚至带着一丝温和的探究，就像一位老匠人在审视一把新打造的工具。

“你的框架很漂亮，结构也很对称。”塞尔的声音沙哑而精准，“但是，先生，我想请问——你为什么要引入这层额外的抽象？”

年轻学者愣了一下，试图辩解：“因为这样更一般化（General），能统一……”

“一般化是好事，但它必须有代价，也必须有收益。”塞尔举起一根手指，轻轻点了点空气：“我在 1955 年写 FAC（代数凝聚层）的时候，引入层上同调（Sheaf Cohomology），不是为了让代

数几何变得更难懂，而是为了能算清楚黎曼-罗赫定理中的欧拉示性数。那是为了把计算变得更‘经济’。”

塞尔站起身，步伐虽然缓慢，但气场压得全场鸦雀无声。他走到黑板前，指着那堆复杂的图表。“你为了‘统一’，把具体的模形式结构藏在了层层叠叠的定义之下。那么，请告诉我——用你这套宏大的理论，你能比经典的 Hecke 算子更快地算出 Δ 函数的第 12 个系数吗？”

年轻学者哑口无言。

塞尔叹了口气，转身在黑板角落写下了一个简短的公式。“抽象的目的是为了更好地计算 (Mieux Calculer)，是为了抓住问题的喉咙，而不是为了制造迷雾。”“如果我们迷失在抽象的迷宫里，却忘记了我们出发是为了解决数论中的具体问题，那这就不是数学，这是神学。”

那一刻，凑感到一阵电流穿过脊背。这才是塞尔。他不是反对抽象。他是抽象的大师。但他痛恨那些没有锋芒、切不开现实的钝刀。

走出学院，巴黎的夕阳将拉丁区的街道染成金红色。葛城没有立刻说话，而是带着凑走进了一家古老的书店，指着书架上一排排塞尔的著作：Local Fields, Linear Representations of Finite Groups……每一本都是薄薄的，却字字珠玑。

“看懂了吗，凑？”葛城轻声问道。

凑点了点头，眼神中多了一份深邃的敬畏：“我以前误解他了。我以为他是那种只盯着泥土看的老古董。但其实……正是他教会了我们如何用最精简的抽象语言去描述泥土。”

“没错。”葛城从书架上抽出一本关于 Grothendieck 的传记，翻到了关于 Motives 的那一章。

“格罗滕迪克是伟大的梦想家。在后期，当他提出 Motives 和 Pursuing Stacks 时，他的目光已经看向了遥远的未来，他想要构建一个完美的数学乌托邦。”“但塞尔保持了保留态度。甚至可以说是冷淡。”

“为什么？”凑问道，“Motives 不是很美吗？”

“因为在当时，那是一个没有地基的空中楼阁。”葛城合上书，“塞尔并不是不相信 Motives 的存在。他只是认为，在没能算出具体的 L-函数、没能解决具体的韦伊猜想之前，过度的抽象是一种逃避。”

葛城看着凑，语气变得语重心长：“塞尔反对的不是抽象，而是无根的抽象。”“他逼着格罗滕迪克去面对具体的算术问题，逼着他把那些飘在天上的几何直觉，变成可以实实在在算出同调群的工具 (Étale Cohomology)。”

“凑，你要去普林斯顿了。你要去学 Lurie 的 SAG。那是当今最前沿、最宏大的抽象理论。”葛城的手重重地按在凑的肩膀上：“但我希望你记住今天塞尔说的话。”“去学那片‘大海’，但不

要淹死在里面。你要学会用那些无穷范畴的工具，回来解决具体的、坚硬的问题。”“只有能算出答案的抽象，才是真正有力量的抽象。”

凑看着书架上塞尔和格罗滕迪克的名字并排而立。一个代表着无尽的想象力 (Sea)，一个代表着精准的控制力 (Anchor)。两者缺一不可。

“我明白了。”凑对着虚空，也对着自己未来的道路，郑重地许下誓言。“我会带着塞尔的‘锚’，去航行格罗滕迪克的‘海’。”

28.2 Infinity 的香气

第二天。香榭丽舍大街。葛城去帮朋友买红酒了，留下凑一个人去给千夏买礼物。这对于数学天才来说，比同伦论还难。

凑站在琳琅满目的奢侈品店前，感到一阵眩晕。“包？这也太拓扑复杂了，什么叫荔枝纹？……口红？色号比光谱序列还多……”他像个无头苍蝇一样乱转，直到走进了一家高端香水店。

导购小姐热情地喷洒着各种试纸。凑原本被那些浓烈的香味熏得想逃跑，但他的目光突然被柜台正中央的一瓶香水吸引了。那瓶香水的瓶身设计成了一个优雅的“8”字形，或者说，横过来的 ∞ 。

“Monsieur, c'est notre nouveau parfum...”导购小姐介绍道。凑指着那个瓶子，眼睛亮了。“这个名字是？”“It's called **Infinity**.”

Infinity (无穷)。 ∞ -Category 的无穷。对数学的无尽追求。以及，对千夏的……无限的爱。“就是它了。”凑毫不犹豫地掏出了信用卡 (虽然看到价格时心在滴血)。这不仅仅是一瓶香水。这是一个数学家的浪漫。

29

隐士的墓碑与起飞

29.1 比利牛斯山的迷雾与《收获与播种》

巴黎之行并没有结束。在返回东京之前，葛城租了一辆车，带着凑一路向南，穿越了整个法国，驶向法西边境的比利牛斯山区。目的地是一个在普通地图上几乎找不到的小村庄——**Lasserre**（拉塞尔）。

那是亚历山大·格罗滕迪克隐居了整整 23 年，直到去世的地方。

车停在路边。四周是郁郁葱葱的树林，湿润的雾气在山间缭绕，将这个世界包裹得像是一个巨大的茧。没有宏伟的墓碑，没有任何纪念标志。只有风吹过树叶的沙沙声，听起来像是一片遥远的海浪，又像是某种低沉的絮语。

葛城拿出一瓶在巴黎买的红酒，拔开软木塞。他没有喝，而是将深红色的酒液缓缓倒在路边的泥土里。酒液渗入大地，仿佛是在祭奠那位伟大的先驱，又仿佛是在安抚一个孤独的灵魂。

“他在这里，切断了与世界的一切联系。”葛城望着迷雾，声音有些飘渺，“不仅仅是断连（Disconnect），那是决裂。”

葛城转过身，靠在车门上，点了一根烟。烟雾在清冷的空气中升腾。“凑，你知道他晚年写了一本几千页的自传式手稿，叫《收获与播种》（Récoltes et Semailles）吗？”

凑点了点头：“听说过。但据说那是他对数学界的控诉书。”

“控诉？是的。但他控诉的不是谁抢了他的奖项，或者谁占了他的职位。”葛城的眼神变得深邃，透过烟雾看着虚空：“他控诉的是——数学失去了灵魂。”

“在格罗滕迪克眼里，数学不是一种职业，不是一种智力游戏，更不是用来炫耀技巧的工具。对他来说，数学是像呼吸一样自然的、孩童般的‘天真’，是聆听上帝声音的、最纯粹的爱。”

葛城的声音低沉下来，带着一丝对历史的悲悯：“但他看到的现实是，他的继承者们——那些绝顶聪明的数学家，虽然继承了他的理论框架，继承了概形、同调、Topos，却把它们变成了一种精密的、冰冷的‘高科技’。”“他觉得，大家只顾着收割果实，却忘记了播种时的那份谦卑和敬畏。他觉得他的‘花园’被修剪成了整齐划一却毫无生机的‘公园’。”

“因为太过纯粹，所以无法容忍哪怕一丝一毫的‘职业化’与‘平庸’。这才是他感到被背叛的根源。”

凑看着那片寂静的山林。他仿佛能看到一个老人在昏暗的烛光下，因为无法忍受数学变得“市侩”而选择自我流放。那种因为极度的爱而产生的恨，比任何世俗的仇恨都更令人窒息。

“凑，”葛城扔掉烟头，用鞋底碾灭，“带你来这里，是因为你要去普林斯顿了。”

“那里不是名利场，那里也不是政治斗争的漩涡。恰恰相反，那里是世界上最纯粹的地方。那里的人，和你一样，甚至比你更痴迷于真理。”

葛城走上前，双手抓住凑的肩膀，眼神前所未有的严肃：“但正因为如此，那里才危险。”

“在那样的环境里，你会很容易忘记‘人’的存在。你会觉得吃饭、睡觉、和普通人聊天都是在浪费时间。你会觉得只有 E_∞ -Ring 才是真实的，而现实世界只是一个充满了噪音的投影。”“你会很容易像格罗滕迪克一样，因为追求绝对的纯粹，而开始厌恶这个充满了灰度、充满了妥协的现实世界。”

“这就是‘隐士的诅咒’。当你飞得太高，空气太稀薄的时候，你会不想下来。”

葛城帮凑整理了一下被山风吹乱的衣领，语气变得温柔：“但是，凑。不要变成那样。”“数学是神圣的，但数学家是人。”“格罗滕迪克选择了拥抱神性而抛弃人性，所以他在孤独中走向了疯狂。我不希望你走上那条路。”

“你要带着千夏给你的锚。只有爱，只有那些看起来‘不那么数学’的、温暖的琐事，能把你从虚无的高空中拉回来。”“你需要那个不动点，让你在探索完深渊之后，还能找回回家的路。”

凑看着这片埋葬了数学之神的山林。他感到一阵战栗，随即是深深的释然。他终于明白了为什么葛城要在她去普林斯顿之前，带她走这一趟。这不是关于“防备坏人”的警告，这是关于“如何作为一个凡人去触碰神之领域”的教诲。

他对着虚空，对着那位在此长眠的、过于纯粹的播种者，深深地鞠了一躬。

“我会的。葛城老师。”凑抬起头，目光清澈如洗，“我会去普林斯顿，去那个最纯粹的地方。但我绝不会迷失在那里。因为……”他下意识地摸了摸胸口，那里藏着千夏给他的护身符，也藏着他“人世间”的眷恋。“我有必须要回去的地方。”

29.2 尾声：起飞

成田机场。千夏脖子上戴着莫比乌斯环，怀里抱着凑从香榭丽舍带回来的“Infinity”香水。她轻轻喷了一点在手腕上，那是混合着鸢尾花和木质调的香气，深邃而温暖。

“去吧。”千夏红着眼眶，整理了一下凑的衣领，“带着塞尔的铁锤，带着格罗滕迪克的大海，也带着我的味道。”“别输给美国人。也别忘了吃饭。”

凑用力抱住了她，在她耳边低语：“等我回来。等我搞定了Lurie的理论，我就回来，把这个无穷（Infinity）变成闭环。”

葛城站在不远处，靠着柱子，看着这一幕，欣慰地笑了。他曾经是个逃兵，是个哈佛的幽灵。但现在，他亲手培养出了一个能够飞越那片海的少年。

飞机冲入云霄，划破了东京的天际线，向着大洋彼岸的普林斯顿飞去。属于濑名凑的“大学篇”，在这一刻画上了完美的句号。而更宏大的、属于世界舞台的乐章，即将奏响。

30

新泽西的绿林与沉默的圣地

“在普林斯顿，每一片树叶上都写着方程式，但如果你听不懂风的语言，它们就只是枯叶。”

— 匿名访问学者

30.1 穿越混沌的巴士

十月的纽约，空气里混合着陈旧的机油味、潮湿的落叶味和一种说不清道不明的焦躁感。这与东京那种精密运转、甚至有些洁癖的秩序感截然不同。

在时代广场的巴士总站（Port Authority），濑名凑拖着沉重的行李箱，像个被抛弃在异星球的宇航员。周围是各种肤色的人群，他们用着西班牙语、英语、法语大声交谈，手里拿着油腻的披萨或星巴克纸杯。那种嘈杂的生命力让凑感到窒息。他紧紧攥着那张从网上打印下来的 Suburban Transit 100 路车票，指关节因为用力而发白，生怕一松手就会被这股混沌的洪流冲

走。

“Princeton? Next stop.” 司机是个黑人大叔，声音浑厚得像低音提琴。

车门关上，将曼哈顿的喧嚣隔绝在外。巴士穿过林肯隧道，驶入新泽西州。窗外的景色像电影胶片一样切换：从令人窒息的摩天大楼变成了杂乱的工业区，废弃的工厂烟囱在灰色的天空下伫立，然后是大片大片的芦苇沼泽，最后变成了无边无际、仿佛没有尽头的绿色树林。

凑把额头抵在冰凉的车窗上，随着车身的震动微微颤抖。他怀里紧紧抱着那个磨损的双肩包，里面装的是那本写满了笔记的《Spectral Algebraic Geometry》——那是他在这个陌生世界里唯一的护身符。

看着窗外飞驰而过的陌生景色，一种巨大的、后知后觉的孤独感像潮水般袭来，瞬间淹没了他。这里没有千夏早上递过来的温热便当，没有葛城老师那间乱糟糟却令人安心的、充满烟草味的公寓，也没有随处可见的 7-11 便利店。只有他一个人。在这个被誉为“数学界教皇国”的地方，他不再是那个被众人仰望的天才，只是一只微不足道的、颤抖的蚂蚁。

一个半小时后，巴士驶入了拿骚街 (Nassau Street)。气氛瞬间变了。古老的红砖建筑，爬满墙壁的深红色常春藤，哥特式的塔楼在夕阳下投下长长的影子。这里安静得像是一座修道院，空气中似乎都悬浮着智慧的尘埃。路过的每一个行人，哪怕是穿着卫衣骑自行车的少年，眼神里似乎都藏着一个未解的猜想。

30.2 IAS：爱因斯坦走过的小径

凑没有先去宿舍。他像是一个急于朝圣的信徒，凭着直觉和地图，穿过了普林斯顿大学的校园，沿着那条著名的林荫小道，走向了更深处的圣地——高等研究院 (Institute for Advanced Study, IAS)。

这是一片与世隔绝的净土。大片的草坪修剪得整整齐齐，几座朴素的红砖建筑散落在树林之间。没有围墙，没有门卫，只有几只野鹿在悠闲地吃草，看到凑走近也毫不在意。

这就是 Fuld Hall。那座白色的钟楼在暮色中显得格庄严。这就是那个曾经容纳了阿尔伯特·爱因斯坦、库尔特·哥德尔、冯·诺依曼的地方。人类最伟大的大脑曾在这里散步，他们留下的脚印似乎还在草地上微微发热。

凑站在草坪边缘，行李箱的轮子陷在泥土里。“Jacob Lurie 就在这里。”他深吸了一口这里微凉的空气。那是混合着落叶腐烂和纯粹理性的味道。

他并没有直接走进去。一种近乎胆怯的敬畏抓住了他。他沿着研究院后面的小树林 (The

Institute Woods) 慢慢地走着。据说，当年爱因斯坦和哥德尔每天下午都会在这里散步，讨论着那些关于时间、引力和宇宙终极真理的问题。

凑踩在厚厚的落叶上，发出沙沙的声响。每一步都像是在叩问自己的灵魂。“我真的……属于这里吗？”在东京，他是“怪物”，是“天才”。但在葛城老师的描述里，这里每个人都是怪物，甚至连怪物都不足以形容他们。他想起了 Scholze 那双仿佛看透了一切的眼睛，想起了那些他要花一周才能读懂一页的预印本。脚下的路，突然变得无比沉重。

31

神的沉默与失效的语言

31.1 Simonyi Hall 的会面

第二天上午。IAS，Simonyi Hall。这是数学学院的主要办公楼。这里的走廊铺着厚厚的地毯，吸走了所有的脚步声，安静得比医院还要压抑。每一扇紧闭的门后，都可能坐着一位菲尔兹奖得主，正在与上帝进行无声的对话。

凑站在 Jacob Lurie 的办公室门前。他看了看手表，距离约定的时间还有一分钟。他的手心全是汗，在裤子上擦了又擦。他深呼吸了三次，才鼓起勇气，轻轻叩响了那扇深色的木门。

“Come in.” 声音很轻，甚至有些羞涩。与他在数学界那如雷贯耳的威名完全不符，听起来一点也不像是一个重塑了代数几何的“神”。

凑推开门。办公室很宽敞，落地窗外就是那片著名的树林，阳光斑驳地洒在地面上。房间里乱得很有葛城老师的风格——或者说，比葛城还要乱。书架上的书摇摇欲坠，地上堆满了打印的论文，黑板上写满了密密麻麻的白色符号。

一个戴着眼镜、穿着格子衬衫、头发有些自然卷的男人从书堆后转过身来。**Jacob Lurie**。他看起来比照片上更年轻，也更内向。他没有 Scholze 那种锋芒毕露的压迫感，看起来就像是一个温和的邻家大哥哥，或者一个在图书馆角落里埋头苦读的研究生。

“You must be Minato Sena.” Lurie 放下手中的笔，说道，“Katsuragi 的学生？”

“Yes! I am! Nice to meet you, Professor!” 凑紧张得声音都变调了，那个标准的 90 度鞠躬僵硬得像个机器人。

Lurie 笑了笑，那是纯粹学者的笑容，有些腼腆，似乎也不太擅长应对这种过度的礼貌。“不用那么拘谨。Ren (葛城) 发给我的那份关于 H^n 的笔记，很有意思。能在高中阶段就有那种直觉，很难得。”

他没有寒暄旅途的劳顿，没有问东京的天气，甚至没有让凑坐下。他直接从桌上拿起一支粉笔，走到办公室的那块小黑板前，仿佛他们昨天才刚刚中止了一场对话。

“你在笔记里提到，想用 Kan Extension 来定义某种广义的上同调。但是，在 ∞ -Topos 的框架下，我们需要处理的一致性 (Coherence) 问题比你想象的要复杂。”

31.2 失效的巴别塔

Lurie 在黑板上写下一个交换图。

YONEDA IN ∞ -CATEGORY

$$\mathcal{C} \xrightarrow{j} \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S})$$

$$X \longmapsto \text{Map}_{\mathcal{C}}(-, X)$$

Warning: The mapping space is not a set. It's an ∞ -groupoid.

“我们来谈谈这个吧。”Lurie 的声音很轻，语速也不快，甚至有些温吞。“关于如何把你的直觉，安放在 Spectral Schemes (谱概形) 的土壤里。”

这场谈话持续了两个小时。或者说，这是一场单方面的、温柔的“碾压”。

凑原本以为，凭借这一年和葛城的特训，他至少能跟上 Lurie 的思路，至少能插上一两句话。但他错了。错得离谱。Lurie 说的每一个词他都懂——“Fibration”、“Simplicial Set”、“Adjunction”。但当这些词组合在一起时，它们构成了一种全新的、高维的语言。

“Wait, Professor...”凑看着黑板上越来越复杂的图表，额头上渗出了冷汗，“这里的同伦极限 (Homotopy Limit) ……为什么会自动满足下降 (Descent) 条件?”

Lurie 停下来，有些困惑地看着他，眼神清澈而无辜：“因为这是一个 ∞ -Topos。在 ∞ -Topos 中，所有的 Colimits 都是 Van Kampen Colimits。这是 Giraud 公理的高维推广，是显而易见

的。”

显而易见。又是这个词。在东京，当教授们说“显而易见”时，凑会不屑一顾，因为他看到了本质。但现在，当 Lurie 说“显而易见”时，凑只感到一阵眩晕。

Lurie 的思维跳跃幅度太大了。他省略了中间所有的技术细节，直接在最高的概念层面上冲浪。在 Lurie 的脑海里，这些高维结构就像是家里的家具一样清晰、固定。而在凑的脑海里，它们还是一团模糊的、不断变形的雾气。

他拼尽全力调动自己所有的知识储备，调动他在葛城那里学到的一切，才勉强记下了 Lurie 写在黑板上的十分之一。他感觉自己的大脑过载了，CPU 正在冒烟。

“好了，今天先到这里吧。” Lurie 放下粉笔，看了一眼满头大汗的凑，“你可以回去思考一下这个 Mapping Space 的同伦型。”

当凑走出 Simonyi Hall 时，天已经黑了。夜风吹过树林，带来一丝寒意。他觉得自己像是一个刚学会造独木舟的人，突然被扔进了一艘核潜艇的驾驶舱，面对着满屏幕闪烁的仪表盘，手足无措。

32

窒息的茶点与草地上的发呆

32.1 Fuld Hall 的下午茶

IAS 有一个神圣的传统：下午三点的下午茶（Tea Time）。在 Fuld Hall 的公共休息室（Common Room），天才们聚集在一起，一边吃着免费的曲奇饼干，一边讨论着宇宙的终极真理。

这本该是一个社交的好机会，是所有数学学生梦寐以求的场景。但对凑来说，这里是气压最高的修罗场。

凑端着一杯咖啡，尽量把自己缩在角落的沙发里。在他左边，两个看起来比他大不了几岁的博士后正在移动黑板上争论朗兰兹纲领的一个引理，粉笔灰飞扬，嘴里蹦出的全是“自守形式”、“盖尔范德对”。在他右边，那位拿过菲尔兹奖的 Manjul Bhargava 正在和几个学生谈笑风生，手里玩着魔方，仿佛在用玩具解释数论的奥秘。

“嘿，你是新来的？”一个有着浓重东欧口音的男生走了过来，他比凑高出一个头，头发乱糟糟的，眼神里透着一股疯狂。“我是 Andrei，做辛几何的。你呢？”

凑紧张地握紧了杯子：“我是濑名凑。做……代数拓扑。我是 Lurie 的……访问学生。”

“哦！Jacob 的信徒！” Andrei 咬了一口曲奇饼干，咧嘴一笑，露出一种复杂的表情——像是同情，又像是敬佩，“祝你好运。那是深渊。你要小心别被那些 ∞ 给吞噬了。”

“吞噬……” 凑看着 Andrei 转身加入另一场激烈的辩论，大声反驳着对方的观点。在这里，每个人都像是一团燃烧的火，自信、狂热、充满攻击性。只有他，像是一块潮湿的木头，怎么也

点不着。

32.2 草地上的溃败

那一周的周四，是 IAS 的 Members Seminar。演讲者是一位来自巴黎高师的年轻天才，讲题是《Motivic Homotopy Theory》。

讲座开始后的五分钟，凑就彻底迷失了。演讲者语速极快，在黑板上飞速写下六系算子 (Six Operations)，跳过了三个引理的证明，直接引用了 Voevodsky 的结论。“显然，通过 \mathbb{A}^1 -同伦不变性，我们可以得到……”

凑环顾四周。周围的人都在点头，有人在快速记笔记，有人在皱眉思考。只有他，连对方在说什么都听不懂。他感觉自己就像是一个误入高等文明的原始人。

他试图抓住一根救命稻草，为了证明自己的存在，他颤抖着举手，问了一个关于“单连通”的问题。“Excuse me... 如果空间是单连通的，Hurewicz 定理……”

演讲者停下来，有些困惑地看着他，仿佛他在问“ $1+1$ 为什么等于 2”。“Uh... 在 Motive 的语境下，经典的 Hurewicz 定理并不适用。”演讲者礼貌地笑了笑，“这里的‘连通’是指代数意义上的。”

房间里响起了几声善意的、但刺耳的轻笑。那笑声像针一样扎在凑的心上。那是“那个新人连基本概念都没搞懂”的笑声。

讲座结束后，凑逃也似的离开了报告厅。他没有回宿舍，也没有去图书馆。他来到了 IAS 背后那片巨大的草坪上。

夕阳西下，金色的光芒洒在草地上，将树影拉得很长。几只加拿大雁在池塘边散步，发出“嘎嘎”的叫声。景色美得令人心碎，却也冷得刺骨。

凑把那个沉重的背包扔在地上，仰面躺在草坪上，手臂遮住眼睛。一种深深的无力感像藤蔓一样缠绕着他，勒得他喘不过气来。

“我到底在这里干什么？”他问自己。声音在空旷的草地上显得微弱而可笑。在东大，他是天才。是葛城老师的骄傲。是千夏眼里的英雄。但在这里，他是那个连字幕都跟不上的傻瓜。是那个问蠢问题的门外汉。

Lurie 的话在他耳边回响：“显而易见。”Andrei 的话在他耳边回响：“别被吞噬了。”演讲者的轻笑在他耳边回响。

眼泪顺着眼角滑落，流进新泽西冰冷的泥土里。他想千夏了。想念那个不懂数学、却会给他

做完美的厚蛋烧的女孩。想念那个会敲着他的头骂他“笨蛋”、然后给他递上一罐热咖啡的女孩。在这里，没有人给他递咖啡。只有无尽的、冰冷的真理。

“千夏……我好像，真的不行。”他缩成一团，在这个离家一万公里的地方，第一次感到了彻底的崩溃。

32.3 爱因斯坦的房子

天色渐暗。凑从草地上爬起来，拍了拍身上的草屑，像个游魂一样走在回宿舍的路上。路过 Mercer Street 112 号时，他停下了脚步。

那是爱因斯坦曾经的住所。一栋朴素的、白色的木质小房子。窗户里透出暖黄色的灯光，但他知道，那里已经没有那个乱蓬蓬白发的老人了。

据说，爱因斯坦晚年在这里，也曾无数次面对“统一场论”的失败。他也曾被年轻一代的量子物理学家视为“过时的老古董”。他也曾在这条路上孤独地行走，手里拿着那个永远解不开的方程。

“你也曾感到无力吗？阿尔伯特先生。”凑对着那栋沉默的房子喃喃自语。“当你发现上帝也在掷骰子的时候，你也会想哭吗？”

没有回答。只有深秋的寒风吹过枯枝的声响，卷起几片落叶。

这一刻，濑名凑跌入了谷底。他还没意识到，这正是蜕变的前夜。而在大洋彼岸，有一个女孩，正在往行李箱里塞进两盒速食味增汤和一本《普林斯顿旅游指南》，准备给他带来一场意想不到的拯救。

33

像婴儿一样呼吸

33.1 深海高压仓

十一月的新泽西，寒风像刀片一样刮过 Fuld Hall 的红砖墙。图书馆内暖气开得很足，但濑名凑却感到彻骨的寒意。这里安静得可怕，只有偶尔翻书的沙沙声，像是蚕在啃食桑叶——或者说，是这群天才在啃食宇宙的奥秘。

凑面前的橡木桌上，摊开着 Jacob Lurie 的巨著 *Higher Algebra* (高等代数)。那不是书，那是砖头。厚达一千多页，每一页都密密麻麻地写满了定义、引理和推论。

“Definition 4.1.1.1: An ∞ -operad is a functor $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow N(\text{Fin}_*)$ that satisfies...”

凑死死盯着这行字，眼球因为长时间的干涩而刺痛。他拿起自动铅笔，在草稿纸上试图画图，试图证明随后的 Proposition 4.1.1.10。一支笔芯断了，他换了一根。一张草稿纸写满了，他揉成团扔掉。直到墨水耗尽，直到脚边的废纸堆成了一座白色的小山。

“不对……完全不对。”凑抱着头，手指插入乱糟糟的头发里，发出压抑的低吼。“这里的纤维化条件 (Fibration Condition) 为什么能推出这个？这一步……Jacob 是怎么跳过去的？中间至少缺了十页的证明吧！”

他感到一种前所未有的智力窒息。以前在东大，他觉得数学是流动的，是可见的。但在这里，Jacob Lurie 用一种极其抽象、极其严密的语言，构建了一座通天塔。凑感觉自己像是一个刚出生的婴儿，被扔进了一个全是成年人的辩论赛现场。周围全是嘈杂的声音 (∞ -Categories,

Spectra, Operads)，但他听不懂。他不懂语法，不懂主谓宾，不懂那些单词背后的潜台词。

“对于 Jacob 来说，这根本不叫证明。”凑抬起头，看着窗外漆黑的夜空，眼中布满了红血丝，眼神空洞而绝望。“对他来说，这就是呼吸。就像我们说‘苹果是红的’一样自然。他不需要证明为什么苹果是红的，他只是看到了。”

他想起了葛城临行前的话：“不要去翻译。要去吞噬。”

“翻译是没用的……”凑喃喃自语。他一直试图用旧有的、经典的代数拓扑知识去“翻译”这些概念，试图把高维投影到低维来理解。但这就像是用二维的纸去包裹三维的球，注定会破裂。

凑闭上眼睛。他做了一个决定。他不再查阅任何经典的参考书。他强迫自己像个婴儿一样，赤手空拳地跳进这片陌生的符号海洋里。如果不理解，就背下来。如果背不下来，就抄写。笨拙地爬行，摔倒，被海水呛到，爬起来，再摔倒。他在脑海中一遍遍重构那些复杂的单纯集，直到它们开始在梦里自动旋转，直到那种恶心的眩晕感变成身体的本能。

34

泰斗的教鞭与通往天堂的阶梯

34.1 传说中的名字

十二月。初雪未至，但空气已经冻结。普林斯顿高等研究院（IAS）举办了一场名为“同伦论的过去与未来”的特别研讨会。Wolfensohn Hall 的报告厅里座无虚席。这里聚集了当今世界上最聪明的大脑。

濑名凑早早就来到了会场，把自己缩在最后一排的角落里。虽然他现在已经习惯了 Fine Hall 那种令人窒息的高压环境，但今天不同。空气中流动着一种近乎神圣的静穆，连平日里高谈阔论的 Andrei 此刻都乖乖闭上了嘴。

大门打开。两位满头银发的老人走了进来。那一瞬间，甚至连坐在第一排、一向淡漠的 Jacob Lurie 都立刻站了起来，快步走过去，微微弯腰，恭敬地握手。

J. Peter May (彼得·梅)。芝加哥大学的传奇，代数拓扑的教父级人物。**Michael Hopkins (迈克尔·霍普金斯)**。哈佛大学的领军者，Lurie 的博士导师，将稳定同伦论推向现代巅峰的人。

“那就是 Hopkins……”凑屏住呼吸，看着那个戴着厚眼镜、眼神深邃如海的老人，“就是他把 K-Theory 和椭圆曲线结合在一起，开启了 Chromatic Homotopy 的时代吗？”

而旁边的 Peter May，虽然年事已高，背有些佝偻，但精神矍铄。他的眼神里没有老人的浑浊，反而透着一种顽童般的锐利，仿佛随时准备给这个世界出一个刁钻的谜题。

34.2 最好的老师

讲座开始了。第一场是 Peter May。题目很简单，简单得让人怀疑走错了片场：《What are Spectra?》（什么是谱？）

凑愣了一下。谱（Spectra）是稳定同伦论最基础的概念，就像是微积分里的实数。在座的都是世界顶尖的数学家，甚至包括菲尔兹奖得主，为什么要讲这么基础的东西？

但当 May 拿起粉笔的那一刻，凑明白了。

没有故弄玄虚的术语堆砌，没有像之前那个年轻法国学者那样跳过无数步骤、满嘴“显而易见”的傲慢。May 在黑板上画下了一个序列：

$$S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} S^3 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

“我们从球面开始。” May 的声音洪亮、清晰，每一个音节都充满了感染力，就像是一位在那不勒斯讲故事的老渔夫，“想象一下，如果我们允许‘负维度’的球存在，世界会变成什么样？”

他就像是在给小学生讲故事一样。他一步一步，从最直观的几何图像出发，把那个极其抽象的“稳定化”过程拆解得如水晶般透明。他画图，他举例，他甚至用手势比划出空间的扭曲和粘合。

“看，这里的结合律在严格意义上并不成立。” May 转过身，笑着对台下说，“但在同伦意义下，它就像是我们在系鞋带——虽然左手先动还是右手先动步骤不同，但最后打出的结是一样的。我们关心的不是步骤，是那个结。”

凑坐在台下，听得入了神。连呼吸都忘了。这和他这几个月在普林斯顿听到的那些“天书”完全不同。以前的讲座，他感觉自己是被演讲者拖在战车后面狂奔，浑身是伤，稍微一松手就会被甩飞。而 Peter May 的讲座，像是一双温暖的大手。那双手托着他，一步一步地走上台阶。让他不仅看到了山顶的风景，还清楚地知道脚下的每一级台阶是怎么砌成的。

34.3 清晰即仁慈

讲座结束后，凑感到一种前所未有的通透。那些困扰了他几个月的、关于 Symmetric Spectra（对称谱）和 Orthogonal Spectra（正交谱）的技术细节，在 May 的讲解下，突然变得理所当然。

“这就是大师吗……不是把简单的东西讲复杂，而是把复杂的东西讲简单。” 凑喃喃自语。

在茶歇时间 (Tea Break)，凑看着被人群包围的教授们，犹豫了很久。他手里的咖啡杯在微微发抖。最后，他鼓起勇气，挤到了这群大佬的圈子附近。Peter May 正在和 Hopkins 聊天，Lurie 也在旁边安静地听着，偶尔插一句。

“嘿，年轻人。”Peter May 居然注意到了在旁边徘徊的东方少年，笑着招了招手，“刚才我看你听得很认真，眼睛都直了。有什么问题吗？”

凑受宠若惊，差点把咖啡洒在 Hopkins 的鞋上：“啊，那个……May 教授！您的演讲太精彩了！我第一次觉得 Operad (算子) 的概念是如此自然，就像是……就像是植物生长的分形规律一样！”

May 哈哈大笑，笑声震得胡子乱颤：“那是当然。Operad 本来就是为了描述自然的对称性而生的。如果你觉得它复杂，那说明写书的人（也许就是我）没写好。”

Hopkins 在旁边插话道，眼中带着笑意：“Peter 总是这样。他认为如果你不能把一个概念解释给大一新生听，那你就没有真正理解它。”

“这正是我要说的。”May 收敛了笑容，看着凑，眼神变得慈祥而严肃，像是一位祖父在教导孙子。“年轻人，数学不是为了把人吓跑而存在的。我们的工作，是把上帝制造的那些混沌的谜题，整理成人类可以理解的语言。”

May 指了指黑板上残留的公式。“有些人以‘别人听不懂’为荣，觉得那样显得自己高深。”May 摆了摇头，“那是错误的。那是傲慢。True understanding is always accompanied by extreme clarity. (真正的理解，必定伴随着极致的清晰。)”

34.4 传承的火焰

凑看着眼前的这三代人。Peter May ——致力于将复杂的拓扑代数化，构建了现代同伦论的语言基石。Michael Hopkins ——在此基础上，将同伦论与算术几何、物理学连接，拓展了疆域。Jacob Lurie ——站在巨人的肩膀上，用 ∞ -Category 重写了一切。

Lurie 虽然沉默寡言，不善言辞，但他写出的几千页的《Higher Topos Theory》，虽然难读，但也是为了把那些只存在于直觉中的东西公理化，让后人有路可循。

“泰斗们……”凑握紧了手中的咖啡杯，指尖发白，“他们不仅是在探索，更是在铺路。”

Scholze 是天才的开路者，而 Peter May 是伟大的铺路人。凑想起了葛城。想起了葛城为了教他，费尽心思画出的那些图解，想起了他在黑板前擦了又写的背影。

“我也要成为这样的人。”凑在心里暗暗发誓。不仅要看到深渊底部的真理，还要把那里的风

景带回来。画成图，写成书，讲给像当年的自己一样迷茫的少年听。告诉他们：别怕，这里有路。

“谢谢您，May 教授。”凑深深地鞠了一躬，眼眶有些湿润，“您让我明白，清晰也是一种数学的美德。”

Peter May 拍了拍他的肩膀，那只手掌宽厚而温暖，像是传递了某种力量。“去吧，孩子。Jacob 说你有很好的直觉。把你的直觉变成语言，那是你接下来的任务。”

这一天，Fuld Hall 的下午茶不再让凑感到窒息。因为他知道，在这座高塔之上，有些人在努力地向下垂下绳索，等待着后来者的攀登。

35

来自太平洋的暖流

35.1 雪夜的访客

一月，新泽西迎来了一场暴风雪。整个普林斯顿变成了一个银白色的世界。Fuld Hall 的钟楼在漫天飞雪中若隐若现，美得像童话，也冷得像冰窖。

凑裹着厚厚的羽绒服，正准备从图书馆回宿舍。他刚啃完一块冷掉的披萨，胃里一阵翻腾。他低着头，踩着积雪，发出咯吱咯吱的声音。

手机响了。他拿出来一看，是千夏发来的消息：【笨蛋，回头。】

凑愣了一下。回头？回什么头？他下意识地转过身。在 Fuld Hall 楼下的路灯旁，站着一个熟悉得让他心颤的身影。

千夏穿着厚厚的米色大衣，围着那条凑送的莫比乌斯环项链，头顶上落满了雪花。她的脸被冻得红扑扑的，鼻尖也是红的，正对着他用力挥手，呼出的白气在灯光下氤氲。她的脚边，放着一个几乎有她半个人高的巨大行李箱。

“千……千夏？！”凑不敢相信自己的眼睛。他用力揉了揉眼，确信这不是因为过度推导全纯函数而产生的幻觉。他发疯似地跑过去，差点在雪地上滑倒。

“你怎么来了？不是说机票太贵了吗？而且还要转机……”凑语无伦次，手忙脚乱地帮她拍掉头上的雪。

“因为我是经理啊。”千夏吸了吸鼻子，笑着把围巾解下来，踮起脚尖，围在凑空荡荡的脖子上，“经理来视察王牌选手的训练情况，不是很正常吗？而且……”她狡黠地眨了眨眼：“我看某人的周报（line 消息）越来越短，感觉快要撑不下去了呢。”

35.2 味增汤与葛城的信

凑的单人宿舍里，终于有了“人”的味道。千夏像个魔法师一样，打开那个巨大的行李箱。里面塞满了东西：两盒速食味增汤、一包真空包装的鲣鱼干、几包日本的零食，甚至还有一盒……葛城老师最爱的廉价速溶咖啡豆。

电热水壶咕嘟咕嘟地响着，蒸汽腾腾。不一会儿，浓郁的味增汤香气填满了这个原本只有冷冰冰公式的房间。凑捧着那碗热汤，里面还漂着几片脱水海带。他喝了一口。咸鲜的味道顺着喉咙流进胃里，瞬间击溃了他所有的防线。

眼泪毫无预兆地掉了下来，滴进汤里。“好喝……”声音哽咽。

千夏坐在他对面，托着下巴，眼神温柔地看着他。“瘦了。”千夏伸出手，隔着桌子，轻轻抚摸着凑那因为长期熬夜而凹陷的脸颊，指尖微凉，“而且，眼神也不像以前那么亮了。是被这里的天才们欺负了吗？”

凑低着头，看着汤里的豆腐块，眼泪止不住。“千夏……这里的人太强了。Lurie, Scholze, 还有那些研究生……我以为我已经很努力了，可是和他们比起来，我就像个只会爬的婴儿。我有时候觉得，我可能永远也追不上他们。”

千夏叹了口气，起身从包里拿出一个信封，递给他。“这是出发前，葛城老师让我带给你的。他说，如果你哭了，就给你看。”

凑拆开信封。里面只有一张纸，上面是葛城那潦草、狂乱，却无比熟悉的字迹：

CORRESPONDENCE

致陷入自我怀疑的笨蛋：

如果你觉得自己在普林斯顿像个只会爬的婴儿，那恭喜你。这说明你正在从旧壳里蜕变出来。不要试图去和 Scholze 比速度，也不要和 Lurie 比高度。你是濑名凑。你有你的节奏。别被淹死。学会游泳。还有，如果不把千夏带给你的东西吃完，我就把你踢出师门。

P.S. 记得给我带点普林斯顿的土特产（论文）。

——葛城莲

35.3 充电完成

凑看着那封信，又看了看眼前温柔注视着他的千夏。心里的那块坚冰，融化了。他不是一个人在战斗。葛城在东京看着他，用那种别扭的方式关心他。千夏飞越太平洋，跨越一万公里，只为了给他送一碗热汤。

“千夏。”“嗯？”“谢谢你来。”凑隔着桌子握住她的手，那是真实的、温暖的触感，“我觉得……我好像有力气了。我能行。”

那一周，千夏陪着凑在普林斯顿的校园里散步。他们去吃了这里著名的 Bent Spoon 冰淇淋（虽然是冬天，两人冻得瑟瑟发抖还大喊好吃）。他们去爱因斯坦的故居前合影，千夏摆出了搞怪的姿势，凑则依然是一脸严肃的数学家脸，但嘴角却忍不住上扬。她不懂数学，但她懂凑。她用她的存在，提醒着凑：除了 ∞ -Topos，这个世界上还有具体的、温暖的、值得守护的幸福。

36

谱几何的母语者

36.1 甚至不再需要翻译

千夏回国后，新泽西的积雪开始融化，Fuld Hall 窗外的玉兰花含苞待放。Fine Hall 的三楼，深夜两点。空气中弥漫着粉笔灰和过浓咖啡的味道。凑再次打开了那本《Spectral Algebraic Geometry》。

要是三个月前，看这一页的内容，他需要查阅五本参考书，在草稿纸上画满辅助图，还要忍受那种“每个字都认识但连在一起就不知道是什么鬼”的挫败感。但今晚，某种质变发生了。

当他的视线扫过那些复杂的定义时——Spectral Scheme (谱概形)。Derived Stack (导出堆)。Cotangent Complex (余切复形)。大脑不再进行“翻译”。他不再试图把它们降维成经典的代数几何，不再试图用单纯集去生硬地模拟它们。

一阵奇异的眩晕感袭来。凑闭上眼睛，在那一瞬间，他感觉自己坠入了一个没有重力的空间。黑暗中，那些枯燥的 Σ^∞ 和 \otimes 符号消失了。取而代之的，是形状。

他看到原本坚硬、冰冷的经典几何空间 (Schemes) 开始软化、溶解。它们像是由某种高维的流体构成的。他看到了“坍缩”的逆过程——经典的概形就像是被抽干了空气的气球，干瘪、僵硬。而现在，随着 Spectral 理论的注入，这些气球开始充气、鼓胀。那些看不见的“高阶扰动”，就像是围绕在实体周围的幽灵粒子，或者是一层厚厚的、柔软的绒毛，构成了空间真实的质感。

流形在坍塌与展开之间搏动。每一次收缩，都对应着同伦群的截断；每一次展开，都释放出无穷无尽的高维信息。这种搏动与他的心跳同频。这不是生造的、异类的概念。这是数学自然生长的结果，就像肺泡在呼吸，就像花朵在绽放。

“原来是这样……”凑睁开眼，拿起笔，在空中虚画了一个圈。他的嘴角露出了久违的、属于征服者的微笑。“谱概形不是怪物。它只是在这个 ∞ -Topos 的海洋里，那些环谱 (Ring Spectra) 自然生长出来的样子。”

他学会了这门语言。他不再是那个拿着字典、结结巴巴的游客。他开始成为这里的居民。他是这里的母语者。

36.2 猎手的回归

周四下午，高级研讨班。同一个教室，同一群天才与疯子。Andrei 依然坐在那里，准备用尖锐的问题通过折磨演讲者。Jacob Lurie 依然坐在前排，半梦半醒，仿佛在思考另一个宇宙的问题。

今天的演讲者正在黑板上构建一个关于 Descent (下降) 的复杂论证。“……为了证明这一点，我们需要在 Étale 拓扑下考虑这一层同调……”演讲者写下了一行公式，但他停顿了一下，粉笔悬在半空。他在犹豫。全场安静。大家都在等待他填补那个逻辑的跳跃。

凑坐在后排，身体前倾，眼神聚焦。他看到了演讲者犹豫的那个断点。在那个断点处，如果不使用 Hyperdescent (超下降) 条件，普通的下降理论是过不去的。这就像是在走钢丝时少了一根安全绳。这是一种直觉。一种建立在无数次推导、以及 Peter May 的清晰指引、葛城的教诲、千夏的支持之上的直觉。

凑举起了手。这一次，他的手很稳，不再颤抖。“Excuse me.”

演讲者转过头。前排的 Lurie 也转过头。Andrei 也惊讶地回头。

“在这个步骤，”凑指着黑板上那个断点，声音平静而清晰，像是切开黄油的刀，“如果我们考虑的基环谱 (Base Ring Spectrum) 不是连通的，普通的 Étale Descent 可能不成立。我们是不是需要加上 Hypercomplete 的条件？”

36.3 认同的点头

死寂。每个人都在大脑中飞速演算。一秒。两秒。突然，Jacob Lurie 微微点了点头。“Good point.” Lurie 淡淡地说道，语气中带着一丝赞赏，“确实，我们需要 Hypercompletion。否则同伦极限不会收敛。”

演讲者也恍然大悟，如释重负：“啊，你是对的！我刚才默认了 Noetherian 条件，但我没写出来。谢谢指出。”

Andrei 转过身，第一次正眼打量了一下这个瘦弱的亚洲男生。他咧嘴一笑，竖起了一个大拇指。“不错嘛，新人。看来你从屠宰场里活下来了。”

凑长出了一口气。背后的衬衫已经被冷汗湿透了。但他知道，他赢了。不仅仅是赢得了那个“Good point”。而是他终于能够在这个世界上最聪明的大脑之间，用他们的语言，插上一句属于自己的、掷地有声的话。

37

不是终点，是入海口

37.1 最后一课：普林斯顿的黄昏

五月的新泽西，绿意盎然。IAS 的 Simonyi Hall 办公室里，夕阳透过落地窗洒进来，把整个房间染成了金色。凑站在门口，手里拖着贴满贴纸的行李箱。

“要走了？”Lurie 停下手中的动作，转过身。“是。明天的飞机。这一年，承蒙您的照顾。”凑深深鞠躬，久久没有抬起头。

Lurie 走到黑板前。那上面还留着他们昨天讨论的一组关于 K-Theory 的公式。他看着凑，眼神不再是看一个学生，而是看一个年轻的同行。“Minato，你是我见过的最有直觉的学生之一。你现在的技术，已经足以去写你自己的论文了。”

“但是，在让你离开之前，我还有最后一句话要送给你。”

37.2 屠龙刀与恶龙

Lurie 指着黑板上那复杂的交换图，那是他们这一年心血的结晶。“这一年，你沉迷于构造，沉迷于体系的完美。这很美，我知道。我也曾沉迷于此。”

“但是，”Lurie 的声音变得低沉有力，“**Abstraction is not the end. It is a means.** (抽象不是目的，而是一种手段。)”

“一个统一的、再美好的理论，如果不能解决任何具体的问题，如果它不能解释为什么椭圆曲线会有模性，如果它不能告诉我们素数的分布规律……那它就只是一个精致的空中楼阁。”

Lurie 走到窗前，指着远方。“你知道为什么我们要发展 ∞ -Category 吗？不是为了让数学变得更难懂。是为了攻克那些用旧工具无法触碰的堡垒。”“比如 **Geometric Langlands Program**（几何朗兰兹纲领）。”

Lurie 转过身，向凑伸出手。“带着这把屠龙刀回去吧。但不要把它挂在墙上欣赏。去寻找你的恶龙。去寻找你自己的‘韦伊猜想’。”

凑紧紧握住那只手。那是一只创造了新世界的手，现在，这股力量传递到了他的手中。“是！我会找到的。我会用这套语言，去探寻更广阔、更具体的数学天地。”

走出 Simonyi Hall，凑最后一次回头看了看那座白色的钟楼。他不再迷茫。因为他知道，这不仅是普林斯顿的结束，更是他通往世界、通往真理大海的真正起点。

38

色同伦的诱惑与悖论的档案

38.1 京都的低气压

大四的深秋，京都国际会馆被漫山的红叶包围。这里正在举行一场关于“稳定同伦论与算术几何”的顶级研讨会。空气中弥漫着一种只有数学家才能嗅到的、令人窒息的浓度——那是智商的密度。

濑名凑刚刚结束了他的十分钟短报告 (Short Communication)。题目是《On the Geometric Interpretation of Height in Chromatic Homotopy via SAG》。台下反应平平。对于大多数还在用经典谱序列计算的听众来说，凑的语言太“Lurie 化”了，充满了晦涩的 ∞ -Topos 术语，仿佛在讲天书。

凑有些沮丧地收拾着东西，准备离开。“Excuse me.” 一个低沉、厚重，带着不容置疑权威感的声音在他身后响起。

凑转过身，瞳孔瞬间收缩。站在他面前的，是一个身材高大、目光如炬的男人。他穿着一件剪裁考究的深色西装，即使是在闲聊的茶歇时间，他周围的空气也仿佛凝固了。Michael Hopkins (迈克尔·霍普金斯)。哈佛大学教授，色同伦论 (Chromatic Homotopy Theory) 的教父，当代数拓扑界的凯撒。

“H-Hopkins 教授！”凑紧张得手心出汗，差点把笔记本掉在地上。

“放松，年轻人。” Hopkins 微微一笑，但这笑容里带着审视猎物的锋利，“我刚才听了你的

报告。你处理 Morava E-theory 的方式……很有趣。你似乎完全跳过了代数上的形式群定律，直接在谱几何（Spectral Geometry）上操作？”

“是、是的。”凑深吸一口气，强迫自己冷静下来，“我认为高度（Height）不仅仅是代数不变量，它是模空间分层的几何体现……”

Hopkins 盯着凑看了许久，那种目光仿佛要穿透凑的大脑，看到他神经元的连接方式。

“Jeremy Hahn 跟我提过你。” Hopkins 突然说道。

“Jeremy 教授？”

“是的。他是今年剑桥 Part III 招生委员会的顾问。” Hopkins 的眼神变得玩味起来，“前天他给我打电话，说他看到了一个‘悖论’（Paradox）般的申请材料。”

Hopkins 走近一步，压迫感陡增：“Jeremy 说，有个来自东京的本科生，Zero Profile——在 ArXiv 上没有预印本，没有发表过任何同行评审的论文，履历干净得像一张白纸。”“但是，这个人的推荐信里，却躺着 Jacob Lurie 的亲笔信。而且 Lurie 只写了一句话：*'He sees what I see.'*（他看到了我所看到的。）”

Hopkins 看着眼前这个略显瘦弱的亚洲男生，眼神中流露出一丝惜才的狂热：“我本来以为 Lurie 只是在还某个人情。但听了你刚才的报告，我明白了。他没有撒谎。”“你确实是个怪物。一个没有发表记录，却已经掌握了核武器密码的怪物。”

Hopkins 从西装口袋里掏出一张名片，那上面只有简单的名字和哈佛的邮箱，却比金子还沉重。“去剑桥吧。Jeremy 已经批准了你的剑桥申请。去吧，Part III 对别人来说是地狱，对你来说只是热身的健身房。去那里把你的基础打磨得更完美。”

他把名片塞进凑的手里，语气平静却充满了诱惑：“拿到 Part III 的 Distinction 学位。然后直接来哈佛找我。”“我们正在攻克球谱的稳定同伦群。我们需要你这样的大脑。”

38.2 金色的重负

回到东京时，银杏大道已经铺满了金黄的落叶。凑的手里捏着那个来自剑桥的厚信封（全额奖学金录取通知），口袋里揣着 Hopkins 的名片。

这简直是拿到了通往数学神殿的 VIP 门票。但凑站在赤门前，脚下却像灌了铅一样沉重。

透过综合图书馆巨大的落地玻璃窗，他看到了那个熟悉的身影。藤井千夏。她坐在靠窗的角落，周围堆满了《分子细胞生物学》、厚厚的生化笔记，还有一摞东大修士入学考试的真题集。

那是大四的千夏。为了能跟上凑的脚步，为了不再只是做一个“经理”，她选择了留在东大

深造，攻读生物学硕士。

凑隔着玻璃，看着她疲惫地揉着脖子，喝了一口便利店的冷咖啡，然后用力拍了拍脸颊，继续埋头苦读。

这四年，像电影胶片一样在凑的脑海里回放。大一，她陪他去名古屋，一个人逛博物馆。大二，她陪他备考实分析，帮他整理笔记。大三，他去了普林斯顿，她在东京一个人过圣诞节，一个人过生日。现在是大四。她好不容易确定了自己的方向，要在东大扎根。

“如果我去剑桥……”剑桥一年，接着是哈佛五年。又是六年。难道要让她刚刚起步的科研生涯再次停滞吗？难道要让她在最好的年纪，继续做一只守候的候鸟吗？

手中的“金光大道”，此刻却沉重得像一块铅。“在数学上，我有 Lurie 和 Hopkins 的加持。但在感情上……”凑看着玻璃窗里那个倔强的身影，心脏一阵抽痛，“我一直是个自私的独裁者。”

38.3 402 室的望远镜

带着满腹的心事，凑推开了 402 室的门。门刚打开，一股浓烈的烟味扑面而来。

“咳咳……”凑挥了挥手。房间里，葛城莲正站在黑板前，背影显得有些狂热。黑板上画满了复杂的图表，那是凑最近正在研究的东西——**Chromatic Spectral Sequence (色谱序列)**。

“你回来了，京都的明星。”葛城头也不回，粉笔在黑板上飞舞，“报告怎么样？那些老古董有没有被你的 SAG 吓到？”

“……反应平平。”凑把背包扔在沙发上，声音有些低沉。

“正常。天才总是孤独的。”葛城转过身，并没有注意到凑的异样，只是随口问道，“算算时间，剑桥的录取信应该寄到了吧？”

“嗯。寄到了。全额奖学金”

“那就好。”葛城拍了拍手上的粉笔灰，露出了一个欣慰的笑容，“去了剑桥，记得多去看看 Newton Institute 的报告。虽然你现在的水平已经不需要上课了，但那一年的沉淀对你未来很重要。之后申请美国的博士也容易些。”

“葛城老师，你这是在算什么？”凑指着黑板，试图转移话题。

“我在算 Telescope Conjecture (望远镜猜想)。”葛城弹了弹烟灰，眼神变得锐利，“看了你在普林斯顿发回来的笔记，我突然意识到，我在 deformation theory 里用的那个技巧，或许可以用来攻击这个老顽固。”

凑震惊了。望远镜猜想。那是同伦论里最著名的硬骨头之一。葛城老师，这个曾经满足于解

决具体形变问题的“塞尔”，现在竟然主动向着最抽象、最困难的深渊发起了冲锋。

“怎么？觉得我自不量力？”葛城咧嘴一笑，“是你小子把我带坏了。看着你天天在天上飞，我这个做老师的，总不能一辈子只会在地上修修补补吧。”

葛城指着黑板上的一个关键步骤，眼神变得深邃：“凑，你看这里。Hopkins 他们用的方法太依赖代数计算了。如果我们引入你搞的那个 SAG 几何直觉……”

那一刻，凑感到了一种强烈的、电流般的共鸣。那是他在普林斯顿没有感受到的——灵魂的共振。

在哈佛，他是“天才”，是 Hopkins 想要收入麾下的“大脑”。但在 402 室，在这个烟雾缭绕的小房间里，他是葛城的“战友”。

38.4 局部化的最优解

“葛城老师。”凑的声音有些颤抖。“嗯？”

凑深吸了一口气，走上前。他从包里掏出那封剑桥的录取信，轻轻放在了杂乱的桌子上。葛城瞥了一眼，刚想说“恭喜”，却看到凑又掏出了一样东西，压在信封上。

那是一张黑底金字的名片。Michael Hopkins, Harvard University.

葛城的目光落在名片上的瞬间，瞳孔剧烈收缩。他猛地抬起头，眼神变得无比锐利。“Hopkins 的私卡？他在京都找你了？”

“嗯。”凑点了点头，“他说，只要我拿到剑桥 Part III 的优异学位，哈佛的大门随时为我敞开。他是认真的。”

葛城倒吸了一口冷气。他太清楚这张名片的分量了。这意味着在这个星球上最好的拓扑学团队里，已经给凑预留了一个核心席位。“那……那你还愣着干什么？”葛城的声音瞬间提高了几度，甚至带着一丝急切的颤音，“这可是直通车！多少人求都求不来的机会！”

凑没有动。他只是平静地看着葛城，然后缓缓拿起了桌上的打火机。

“喂！你干什么！”葛城大惊失色，冲过来一把夺过信封和名片，死死护在怀里，“你疯了？！这是 Hopkins 的亲自邀请！你知不知道这意味着什么？！”

“我知道。”凑平静地看着葛城，眼神前所未有的坚定。“但我不想走。”

葛城愣住了，他像看外星人一样看着凑：“你脑子烧坏了？那是哈佛！那是世界中心！你留在这个破烂的 402 室干什么？这里没有 Hopkins，没有世界顶级的讨论班，只有我这个……”

“只有你这个能跟我一起搞定望远镜猜想的人。”凑打断了他。

凑走到黑板前，拿起粉笔，在葛城的算式旁边补上了一行：“葛城老师，你刚才说的那个思路……只有我们两个人能做出来。”“Hopkins 的团队太庞大了，我在那里只是一个高级算力。但在这里，你是我的塞尔，我是你的格罗滕迪克。”

“而且……”凑转头看向窗外，那是图书馆的方向，嘴角扬起一丝温柔的笑意。“普林斯顿那次我已经让千夏等了我一年。我不想让她再等五年了。我想看着她在东大读完硕士，我想每天都能吃到她做的便当。”

“Lurie 教会了我看无穷 (Global)。但千夏和您，教会了我如何处理局部 (Local)。”“如果不把身边的‘局部’处理好，怎么可能构建出完美的‘整体’呢？”

38.5 被锁上的未来与大笑

葛城沉默了许久。房间里只剩下电脑风扇的嗡嗡声。他看着怀里的信封和名片，又看了看黑板上两人合力写下的算式。

良久，他长叹了一口气。他慢慢地把那个信封和名片整理好，没有还给凑，也没有扔掉。他拉开抽屉的最底层，把它们放了进去，然后“咔哒”一声，锁上了。

葛城背过身去，用力吸了一口烟，掩饰着眼角的湿润，缓缓的开口：“这可是你自己选的。既然留下来了，那就别指望我会手下留情。东大的修士课程可是很变态的，而且……”

葛城转过身，露出了一个狰狞又欣慰的笑容：“搞不出来望远镜猜想，你就别想毕业。”

“求之不得。”凑笑着回答。

走到门口时，凑突然停下脚步，转过身，看着那个把剑桥 Offer 和 Hopkins 名片锁起来的抽屉，又看了看满脸复杂的葛城。少年的脸上突然浮现出一丝狡黠的坏笑。

“呐，葛城老师。”“干嘛？”

“我想了想，与其以后像某人一样，因为受不了哈佛的压力哭着逃回来……”凑指了指脚下的 402 室，又指了指葛城。“现在的我，主动选择留在这里，是不是比当年的你帅气多了？”

“哈？！”葛城额角的青筋跳了跳，手中的粉笔瞬间被捏断，“你这臭小子……哪壶不开提哪壶是吧？”

“哈哈哈哈！”凑大笑着推开门，在那支粉笔砸过来之前逃之夭夭。走廊里回荡着少年的笑声，那是彻底卸下重负后的、自由的声音。

葛城看着空荡荡的门口，愣了几秒，随即也忍不住笑出了声。“臭小子……嘴巴越来越毒了。”他看着黑板上两人共同留下的算式，眼神渐渐变得坚定。“既然留下来了，那就陪我一起……把

这片天捅个窟窿吧。”

38.6 笨蛋的博弈论

深夜十点。东京大学综合图书馆。闭馆的音乐声刚刚响起，三三两两的学生抱着厚重的书本从旋转门里涌出。寒风卷着银杏的枯叶，在空旷的广场上打着旋。

凑站在门口的石柱旁，把脸缩进围巾里，时不时跺跺脚驱寒。他没有看手机，而是盯着出口。

不一会儿，那个熟悉的身影出现了。千夏背着沉重的双肩包，怀里还抱着几本参考书。她看起来累坏了，走路都有些拖沓，一边走一边摘下眼镜揉着酸痛的眼角。

“辛苦了。”凑走上前，自然地接过她怀里的书，顺手把她那个死沉的书包也拎了过来。

“唉？凑？”千夏吓了一跳，随即露出了惊喜的表情，“你怎么来了？不是说今天要去见葛城老师吗？”她看了一眼凑被冻得有些发红的鼻子，心疼地伸出手去捂了捂：“笨蛋，这么冷的天，你在外面等了多久啊？”

“没多久。也就刚把某个世界级难题解决掉的时间。”凑空出一只手，牵起千夏的手。她的指尖冰凉，凑没有多想，直接把她的手揣进了自己温暖的大衣口袋里。

“什么世界级难题啊……”千夏感受着口袋里的温度，脸颊微红，嘴角却忍不住上扬，“少吹牛了。”

两人并肩走在通往赤门的银杏大道上。路灯将他们的影子拉得很长，重叠在一起。

“对了，那个……”千夏试探着问道，语气里带着一丝紧张，“剑桥的信……到了吗？”

凑握着她在口袋里的手，紧了紧：“嗯，到了。”

“怎么样？是全奖吗？”“嗯。全额奖学金。公派留学生待遇。”

千夏停下了脚步。她低下头，看着地面上的落叶，声音有些发颤：“太好了……真的太好了。我就知道你可以的。那……我们要庆祝一下吗？去吃拉面？还是……”

“我拒绝了。”凑的声音平静得像是在说“我吃过了”。

千夏猛地抬起头，眼睛瞪得滚圆，仿佛听到了什么外星语言：“……哈？你说什么？”

“我拒绝了。”凑重复了一遍，语气比刚才更坚定，“信封和名片，已经被锁进葛城老师的抽屉里了。”

“你疯了吗？！”千夏的声音瞬间拔高，打破了夜晚的宁静。她一把甩开凑的手，眼泪几乎是瞬间就涌了出来。“那是剑桥啊！那是全世界最好的数学中心之一！那是你一直以来的梦想啊！你为什么拒绝？！”

她指着凑的胸口，手指在颤抖：“是因为我吗？是因为我说过不想异地恋，还是因为我在准备考研？濑名凑，你把我当成什么了？我是那种会为了自己把你的翅膀剪断的人吗？！”

千夏的情绪失控了。这一年来的压力、备考的焦虑、对未来的迷茫，在这一刻全部爆发。“你这样牺牲……我会开心的吗？我会觉得我是个罪人！我会觉得是我毁了你的前途！”

凑被推得后退了一步，但他没有辩解，只是静静地看着哭得浑身发抖的千夏。然后，他走上前，不顾她的挣扎，用力把她抱进了怀里。

“笨蛋。”凑在她的耳边轻声说道，“听我说。”

“放开我……我要去把信拿回来……我要去找葛城老师……”千夏在他怀里挣扎着，眼泪浸湿了他的大衣。

“听我说，千夏。”凑的声音变得温柔而低沉，像是在解一道最难的证明题。“在数学里，有一种对偶性（Duality）。看起来完全相反的两个方向，其实在深层结构上是等价的，甚至更优。”

“去剑桥，确实是一条通往真理的路。那里有最聪明的大脑，有最前沿的课题。如果是以前的我，大概会毫不犹豫地飞过去。”

凑抚摸着她的头发，让她的情绪慢慢平复：“但是，Lurie 教会了我看无穷（Global），而你教会了我看局部（Local）。我发现在 ∞ -范畴里，如果忽略了局部的纤维，整体的结构就会坍塌。”

“我不是为了你而‘牺牲’了剑桥。”凑松开怀抱，双手捧起千夏满是泪痕的脸，无比认真地看着她的眼睛：“我是为了‘我们’，为了我自己，选择了另一条路。”

“在国外，我会变成一台高速运转的数学机器。我会焦虑，会孤独，会像格罗滕迪克一样，因为过度纯粹而慢慢失去对生活的热爱。最后，我可能确实能证明几个定理，但我会失去‘心’。”

“但在东大，有葛城老师这个战友，有你这个锚点。我会是一个有血有肉的人。而在这种状态下做出的数学，我相信……会比在剑桥做出的更美。”

凑笑了，那是一个卸下了所有天才包袱的、纯粹的少年的笑容：“所以，这不是牺牲。这是博弈论里的纳什均衡（Nash Equilibrium）。在所有可能的策略里，‘留在你身边’不仅让我的收益最大化，也让我们的系统最稳定。”

千夏吸了吸鼻子，看着眼前这个一本正经胡说八道的男生，终于忍不住破涕为笑：“……什么纳什均衡啊，明明就是歪理。”

她伸出手，轻轻抚摸着凑的脸颊，眼神里满是心疼与感动：“你真的是个笨蛋。无可救药的数学笨蛋。”

“那……你真的不后悔？”“那是显然（Trivial）的。”

千夏沉默了一会儿，然后做了一个深呼吸。她擦干眼泪，眼神重新变得坚定，那是属于“数

学系经理”的霸气。

“既然你都这么说了……”千夏踮起脚尖，双手环住凑的脖子，把脸埋进他的围巾里，声音闷闷的：“那就给我负起责任来。”

“什么责任？”

“既然不去剑桥了，既然要在东大做研究……”千夏抬起头，恶狠狠地（其实毫无威慑力）盯着他：“那就去东大拿个菲尔兹奖回来给我看！要是输给那些英国人、美国人，我绝对饶不了你！”

凑愣了一下，随即笑出了声。他抱紧了怀里的女孩，感受着她的体温驱散了所有的寒意。“遵命，经理。”

两人的影子在路灯下重叠在一起。没有什么宏大的誓言，也没有生离死别的悲壮。只有两个年轻的灵魂，在纷繁复杂的命运分岔口，坚定地选择了彼此。这就是属于濑名凑和藤井千夏的，最优解。

39

废墟上的邀请函

“如果你只盯着线性的阶梯，你永远看不懂这片森林。”

— IEKE MOERDIJK

39.1 新的身份

东京大学，本乡校区。安田讲堂前的银杏叶落了又长，转眼已是四年。

濑名凑和藤井千夏顺利完成了本科的学业。在这个樱花再次盛开的季节，他们的学生证换成了新的颜色——那是属于“大学院生（硕士/修士）”的颜色。凑以理科一类首席的成绩毕业，毫无悬念地直升数理科学研究科，继续在坂本研究室深造。千夏也凭借着那种“笨拙但顽强”的努力，考入了农学生命科学研究科的硕士课程，专攻生物统计与遗传学。

而变化最大的，是那个曾经躲在402室吃泡面的颓废男人。葛城莲终于提交了他那篇惊世骇俗的博士论文，结束了漫长的“重修”生涯。现在的他，名牌上印着：“数理科学研究科·助教（Assistant Professor）”。他正式成为了凑的Co-advisor（副导师）。

39.2 四十年的高墙倒塌

四月的一个午后。坂本研究室。新上任的葛城助教没有坐在宽敞的办公桌前，而是依旧习惯性地靠在黑板旁的旧沙发上抽烟（当然，是在开窗的情况下）。

“凑，过来。”葛城的声音低沉，带着一种暴风雨前的宁静。他把一份刚刚打印出来的、还带着墨水温热的 ArXiv 论文，重重地拍在桌子上。“啪！”茶杯里的水面剧烈震荡，仿佛预示着数学界的地震。

凑放下手中的计算，走过去。他现在已经褪去了大一时的青涩，眼神中多了一份沉稳的学者气息。他看向那篇论文的标题：*On the Telescope Conjecture* —— by Burklund, Hahn, Levy, Schlank.

“望远镜猜想（Telescope Conjecture）。”葛城的手指在颤抖，烟灰掉落在地板上他也浑然不觉。“Ravenel 在 1984 年提出的猜想。它预言了稳定同伦范畴中的‘单色层’（Monochromatic Layer）结构是有限的、周期的、驯服的。四十年来，这堵墙屹立不倒，它是色同伦论的基石。”

葛城抬起头，眼神中燃烧着一种混合了恐惧与狂热的光芒：“但现在，它倒了。彻底倒了。”

凑倒吸了一口凉气。“你是说……Ravenel 输了那个著名的赌局？这意味着在 $n \geq 2$ 的高度上，同伦群并不是周期的？”

“不仅仅是赌局的问题，凑。”葛城猛地站起身，走到窗前，推开窗户，仿佛想听到从世界各个角落传来的碎裂声。

“你知道现在外面发生了什么吗？”

葛城的声音变得有些飘渺，像是在描述一场看不见的战役：“在这个瞬间，在 MIT（麻省理工）的休息室里，浓缩咖啡机在响，但没人去接。博士生们正围着一台平板电脑，脸色苍白。因为他们突然发现，自己写了一半的毕业论文，建立在一个已经不存在的地基上。”

“在波恩（Bonn）的马克斯·普朗克研究所，那些习惯了秩序和完美的德国算术几何学家们，大概正盯着黑板发呆。他们引以为傲的‘完美世界’被撕开了一个口子，里面涌出了无穷无尽的混乱。”

“而在罗切斯特（Rochester）……”葛城顿了顿，语气变得复杂，“Doug Ravenel 本人，那个开启了这一切的老人。他现在大概正坐在书房里，看着四十年前他为了这个猜想押下的那瓶酒。他赢了赌局，证明了‘世界是复杂的’；但数学界输了，我们失去了一个简单、优雅的宇宙梦。”

“这不是修正了一个符号，凑。这是信仰的动摇。”葛城转过身，掐灭了烟头，眼神锐利如刀：“这篇论文证明了存在无穷多的‘非周期’元素。那些我们认为被驯服的野兽，其实只是在

装睡。现在，它们醒了。”

“乌得勒支大学 (Utrecht University) 正在组织一个紧急的 Special Semester。Gijs Heuts 是组织者之一。他们要彻底解剖这个‘反例’的构造。”葛城拍了拍凑的肩膀，手掌的温度透过衬衫传过来：“这是我们作为师徒的第一次正式出征。凑，收拾行李。我们要去荷兰。去看看当一个统治了半个世纪的猜想被推翻时，那些世界最顶尖的大脑是如何在废墟上重建大厦的。”

他顿了顿，紧绷的脸部线条柔和了下来，露出了一丝只有在面对“家人”时才会有的温柔笑容：“还有，我帮你查过了。乌得勒支大学生物系有一个关于‘复杂网络与遗传变异’的交换项目。你的那位‘经理’，藤井千夏的名字，也在名单上。”

40

雨中的乌得勒支

40.1 Dom Tower 下的阁楼

荷兰，乌得勒支。这里正如传说中那样，仿佛永远笼罩在细雨之中。运河的水面泛着灰色的冷光，古老的砖石路面总是湿漉漉的，反射着路灯昏黄的倒影。

凑和千夏租住在老城区 (Binnenstad) 的一间阁楼公寓里。那是典型的荷兰老房子，楼梯陡峭得像是在攀岩。但房间很温馨，透过那扇总是挂着雨珠的天窗，可以看到那座著名的 Dom Tower (多姆塔) 高耸入云。每隔十五分钟，悠扬的钟声就会穿透雨幕，回荡在整个城市上空，也回荡在两个年轻人的心里。

“快点快点！第一节研讨课要迟到了！”清晨，千夏穿着厚厚的米色羊角扣大衣，围着红色的围巾，正费力地把那辆高大的荷兰自行车 (Omafiets) 推出公寓大门。“这里的自行车为什么这么高啊！我都踩不到地！”千夏抱怨道，脚尖费力地在湿滑的石板路上点着，“而且刹车居然是向后踩脚踏板，太反人类了！”

凑骑在另一辆黑色的旧自行车上，长腿一撑，显得游刃有余（虽然刚开始也因为倒刹差点撞进运河）。他笑着把千夏的书包挂在他的车把上，伸手帮她扶正了车把，动作熟练而自然。“这是为了适应荷兰人的平均身高——世界第一。”凑解释道，“而且这种倒刹设计是为了腾出手来拿雨伞或者三明治。抓紧了，经理。”

两人骑着车，穿梭在清晨的乌得勒支街道上。雨丝打在脸上，冰凉却清爽。自行车的铃声

“叮铃铃”地响成一片。运河两旁停满了五颜六色的船屋，路过的面包店飘出刚刚出炉的肉桂卷和黄油的香气。

“这就是欧洲啊……”千夏深吸了一口冷冽但清新的空气，脸上洋溢着兴奋，脸颊冻得红扑扑的，“感觉像是骑在维米尔的画里一样。”凑侧过头看着她。在东京，他们总是忙于各自的实验和推导。而在这里，在这个古老而缓慢的城市里，他们终于找回了生活的节奏。“是啊。”凑笑了，眼神温柔，“虽然没有厚蛋烧，但晚饭我们可以试着做做这里的豌豆汤。”

40.2 Freudenthal 大楼的 707 室

把千夏送到生物系所在的 Uithof 校区后，凑赶到了数学系所在的 Hans Freudenthalgebouw (汉斯·弗洛伊登塔尔楼)。葛城已经在 707 教室门口等他了。他穿着一件黑色风衣，手里拿着两杯刚买的黑咖啡，看起来比在东京时更像个严肃的学者。

教室里空气热得发烫，与外面的阴雨形成鲜明对比。这里聚集了来自欧洲各地的同伦论专家——来自波恩的、哥本哈根的、巴黎的。每个人手里都拿着厚厚的打印论文，脸上挂着凝重的表情。那不是参加普通讲座的轻松，而是面对未知的兴奋与不安。就像是一群探险家，正围着一张刚刚发现新大陆的地图，讨论着那里的风暴与怪兽。

讲台上，Gijs Heuts 正在分发这个学期的研讨班日程表。他穿着一件随意的灰色毛衣，头发有些乱，看起来比在哈佛时更加松弛，但眼神依旧锐利如鹰。

Seminar: Ambidexterity and Cyclotomic Redshift

The Plan: Dissecting the Disproof

- **Jan 28:** Overview: From Ravenel's Dream to Burklund's Nightmare - *Gijs Heuts*
- **Feb 11:** Constructing the Counterexample: The Role of Redshift - *Jaco / Chris*
- **Mar 23:** Galois Descent and the Final Contradiction - *Lennart*

“不可思议……”凑看着日程表，低声惊叹，“他们要在一学期内，从头重构那个反例。这不仅是学习，这是在拆弹。”

Gijs 走上讲台。教室瞬间安静下来。“各位，” Gijs 开口道，声音不大，但在安静的教室里回荡，“四十年来，我们一直相信 $L_{T(n)}$ 和 $L_{K(n)}$ 是一回事。我们相信同伦论的世界是完美的、周期的、可预测的。”

他拿起粉笔，在黑板上画了一个巨大的裂痕。“但我们错了。那个反例 (Counterexample) 就

在那里，嘲笑着我们的天真。”“但是，”Gijs 的嘴角上扬，眼中闪烁着光芒，“这种错误是美丽的。因为它揭示了即使在单色层之上，还有更狂野的野兽在游荡。今天，我们就要开始解剖这只野兽。”

41

共同的学生

41.1 幸存者的拥抱

研讨会结束后，激烈的讨论持续了半个小时才散去。黑板上写满了复杂的谱序列图表，那是无数个不眠之夜的结晶。Gijs 正在擦黑板，粉笔灰落在他那件昂贵的毛衣上。

葛城在原地站了一会儿，整理了一下衣领，然后深吸一口气，走了上去。“Gijs。”

Gijs 转过身，看到葛城，先是一愣。他眯起眼睛，仿佛没认出来这个刮了胡子、穿着整洁衬衫、眼神坚定的男人，是当年那个在哈佛颓废逃避的 Ren。随即，他露出了极其灿烂、毫无芥蒂的笑容。“Ren! You actually came!”他丢下粉笔，大步走来，给了葛城一个用力的、充满欧洲气息的拥抱，拍得葛城后背啪啪作响。

“我看了你在 ArXiv 上的那篇关于 Condensed Motivic Cohomology 的预印本。Brilliant work (杰作)! Lurie 跟我提过，说你在日本培养了一个怪物学生，甚至指出了他讲座里的漏洞。”

Gijs 的目光转向站在葛城身后的凑：“你就是 Minato Sena 吧？Jacob 可是很少夸人的，他说你的直觉像野兽一样敏锐。”

凑有些局促地鞠了一躬，用流利的英语说道：“Nice to meet you, Professor Heuts. It's an honor.”

葛城有些不好意思地挠了挠头，低声说道：“Gijs，实话告诉你，我是来取经的。Burklund 他们的技巧太疯狂了，用 K-theory 的红移 (Redshift) 来攻击同伦群的周期性……我现在的感

觉就像回到了研究生一年级。我完全看不懂。”

Gijs 听完，苦笑着摇了摇头，拍了拍葛城的肩膀。“Ren，看着我的眼睛。你也以为我很懂吗？”Gijs 指了指自己的黑眼圈，“为了准备今天的 Overview，我昨晚熬到了凌晨三点，还在查定义。那个反例构造太复杂了，涉及到了模形式、数论、甚至一些我都叫不出名字的代数结构。”

“我们都在重新学习。”Gijs 看着窗外阴沉的天空，“在这场地震面前，没有大师，只有幸存者。我们都是学生。”

那一刻，缠绕葛城多年的心魔——那个名为“Gijs Heuts”的天才阴影——彻底消散了。原来，神也在流汗，也在查字典，也在对着黑板发愁。“原来……我们是同学啊。”葛城低声自语，随即露出了释然的笑容。

41.2 树状同伦论的巨大人

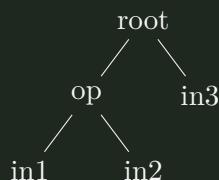
几天后，Gijs 把他们带到了大楼顶层的一间安静办公室。“Ren，你一直问我为什么能熟练运用 Infinity Operad。因为在 Utrecht，我们不只是从‘线性’的角度看同伦。多亏了他。”

办公桌后坐着一位头发花白、眼神睿智的老人，正戴着老花镜在看一篇论文。**Ieke Moerdijk**。代数拓扑界的泰斗，树状集 (Dendroidal Sets) 理论的奠基人。

“你们好，来自日本的朋友。”Moerdijk 的声音温和而有力，带着浓重的荷兰口音。

Moerdijk 站起身，拿起粉笔，在黑板上画了一个分叉的树状结构。

DENDROIDAL SETS Ω



Traditional Simplicial Sets (Δ) model spaces (linear paths). **Dendroidal Sets (Ω)** model ∞ -operads (branching operations).

“单纯集 (Simplicial Sets) 模拟的是路，”Moerdijk 解释道，像是在讲一个古老的寓言，“它们是一维的，线性的。但在望远镜猜想倒塌后的世界里，线性的阶梯断了。我们需要处理复杂的高阶结合律，这就像树枝的分叉。”

他指着黑板上的树：“Gijs 之所以强大，是因为他从小就是在‘树林’里长大的。他看到的世界，充满了分叉和交织。而很多人只盯着那一根主干。”

“年轻的一代，” Moerdijk 看着凑和葛城，目光深邃，“去掌握它吧。既然梯子断了，就学会像藤蔓一样攀爬。”

凑看着黑板上的那个树形图，瞳孔收缩。“所以……Straightening（直直化）不仅仅是拉直一条线，而是修剪一棵树，把它的结构映射到线性空间上？” Moerdijk 赞许地点了点头：“正是。直觉很敏锐，孩子。”

42

逻辑的诱惑与人造的迷宫

42.1 Utrecht：冰冷的机器语言

在乌得勒支的 Freudenthal 大楼里，凑正对着黑板上的一组单纯集（Simplicial Sets）发愁。他试图构造一个高阶同伦的复合，但组合学的复杂性让他寸步难行。

“你还在试图用单纯集来思考吗？”

一个清脆的声音打断了他。凑转过身，看到一位留着干练短发、眼神犀利的女数学家。她手里抱着一台笔记本电脑，上面贴满了函数式编程语言的贴纸。

她是 Paige North。数学系新来的博士后，专攻范畴逻辑。

“用单纯集太累了，” Paige 走上讲台，拿起粉笔，在凑那复杂的几何图形旁边写下了一行代码一样的公式，“为什么不试试 Type Theory（类型论）？在 HoTT 里，你不需要构造那些单纯形，你只需要声明路径的存在。”

凑皱了皱眉。又是这个 HoTT。

“那是……计算机科学家玩的东西。” 凑礼貌但冷淡地反驳，“那是人造的（Artificial）。格罗滕迪克教导我们要寻找数学本身自然的结构，而不是用人类定义的‘语法’去强行规训它。把数学变成代码，就失去了灵魂。”

“灵魂？” Paige 笑了，那是工程师看到诗人时的那种宽容的笑，“Minato，你太依赖 Lurie 那种分析式的思考了。你想要几何的直观，想要看到‘形状’。但你有没有想过，计算机里的

Functional Programming (函数式编程) 也是一种自然的结构? Curry-Howard 对应告诉我们, 程序和证明是同构的。”

“如果机器能帮你验证无穷维度的相干性, 那它就比你那不可靠的大脑更接近真理。” Paige 合上电脑, “下周二, 阿姆斯特丹大学 (UvA) 的 ILLC 有个 Seminar。Benno van den Berg 组织的。去听听吧, 也许会改变你对 ‘人造’ 的偏见。”

凑看着 Paige 离去的背影, 心里有些不服气。机器? 代码? 那是没有温度的铁块。他要的是从泥土里生长出来的几何, 不是这就是他抗拒 HoTT 的原因。

42.2 Science Park 904: 逻辑的圣殿

尽管心里抗拒, 凑还是去了。

阿姆斯特丹科学园 (Science Park)。这里和乌得勒支古老的砖石风格截然不同, 充满了现代主义的玻璃与钢筋。ILLC (逻辑、语言与计算研究所) 就坐落在这里。

这里是直觉主义数学 (Intuitionism) 的圣地。L.E.J. Brouwer 曾经在这里宣称 “排中律” 是不可靠的, 数学必须建立在具体构造之上。

在图书馆的走廊里, 凑看到几个博士生正围着一台电脑, 屏幕上跑着 Coq 或者 Agda 之类的证明辅助软件。

“这步推导不通过, 因为你没有构造出具体的证据项。” 其中一个人说道。

凑停下脚步, 看了一会儿, 随即摇了摇头, 嘴角露出一丝不以为然。

“怎么了?” 千夏好奇地问, “他们在做的也是数学吗?”

“是逻辑。” 凑压低声音, 语气中带着一种由于年轻气盛而产生的偏见, “但那是 ‘警察’ 的逻辑。他们过度纠结于语法的合法性, 却忽略了数学本身流动的形状。如果格罗滕迪克看到数学变成了这种僵硬的代码, 一定会气得从坟墓里爬出来。”

研讨室里坐满了人。不同于数学系的随性, 这里的人看起来更加严谨, 很多人面前都放着电脑。空气中弥漫着一种 “语法” 的味道。

讲台上站着的是 Benno van den Berg。他正在讲《Semantics of Homotopy Type Theory》。

“我们通常认为, 几何是 ‘实在’ (Semantics), 而逻辑语言只是 ‘描述’ (Syntax)。” Benno 在黑板上画了一个立方体, “但在路径归纳 (Path Induction) 的法则下, 语言本身构造出了空间。我们不仅仅是在描述一个原本存在的球体, 我们在用逻辑规则 ‘编织’ 一个球体。”

凑坐在角落里, 原本漫不经心的眼神逐渐聚焦。他发现 Benno 讲的 HoTT, 和他之前理解

的不太一样。那不是冷冰冰的代码，而是一种……极其精密的结构主义。

42.3 动态的诱惑

Benno van den Berg 的研讨班结束了。教室里弥漫着一股高强度的脑力燃烧后的寂静。凑还在回味刚才关于“路径归纳”的几何解释，那精密的类型论结构让他感到一种秩序的美感。但对于身旁的千夏来说，这一个小时简直是听天书的折磨。

“全是符号……明明是几何，为什么非要写成代码啊。”千夏揉着太阳穴，一脸的疲惫。

两人走在 Science Park 904 宽敞明亮的走廊上。这里是逻辑学的圣地，空气中似乎都漂浮着量词和推导符号。走廊两侧的布告栏上，贴满了一张张花花绿绿的学术海报。

突然，千夏停下了脚步。

“凑！你快看这个！”

她指着其中一张海报，眼睛里的疲惫一扫而空，重新亮了起来。

那是一张关于 **Dynamic Epistemic Logic (DEL, 动态认知逻辑)** 的讲座海报。海报的设计很生动，画着几个小人，头顶着气泡，气泡里的内容随着箭头的指向在不断变化。标题写着：*Information Update and the Logic of Interaction* (信息更新与交互的逻辑)。

“当一个公开宣告 (Public Announcement) 发生时，原本的知识模型会发生坍缩……”千夏念着上面的简介，语气兴奋，“这很有趣诶！数学通常都讲永恒不变的真理，但这个逻辑讲的是‘变化’。它在计算‘当我们知道新消息时，世界会变成什么样’。”

她转过头，拉了拉凑的袖子：“这不就像是生物进化，或者……就像是我们之间的关系吗？随着每一天的相处，我们对彼此的‘模型’都在不断更新。这才是活着的逻辑啊！”

然而，凑只是淡淡地扫了一眼海报，嘴角露出一丝不以为然。

“这是‘警察’的逻辑。”凑双手插在口袋里，语气冷淡，“Epistemic (认知的)？那只是在分析人类语言的语法结构罢了。A 知道 B 知道 P……这只是无聊的文字游戏。”

他转过身，准备离开：“千夏，刚听完 Benno 的讲座你应该明白，数学追求的是几何本身那种不随时间改变的结构 (Invariant)。这种还要考虑‘谁知道什么’、‘什么时候知道’的东西，充满了人为的噪音。太琐碎了，没有美感。”

“你……”千夏气结。她看着凑那副“我只关心永恒真理，凡俗变化与我无关”的傲慢侧脸，心中那股“经理”的火气又上来了。

“什么叫琐碎？难道只有你的 ∞ -范畴是高贵的吗？”千夏一把抓住凑的手臂，力气大得让凑

一愣，“你总是讨厌‘时间’，讨厌‘变化’，你就是害怕面对动态的东西！”

“喂，千夏，松手……”

于是，在 Science Park 904 人来人往的走廊里，出现了滑稽的一幕：堂堂东大理一首席、未来的代数拓扑新星，像个不情愿的小学生一样，刚出虎穴 (HoTT)，又被身材娇小的女朋友硬生生拖进了狼窝 (DEL)。

42.4 Van Benthem 的假说

讲座谈厅里座无虚席。和数学系那边随性的穿搭不同，这里的人看起来更加极客，很多人面前都放着笔记本电脑，屏幕上跑着证明辅助软件。

讲座的主题正是千夏感兴趣的“动态认知逻辑”。演讲者在黑板上画出了一个个“Kripke 模型”——那是代表可能世界的点，通过连线表示认知的可能性。

“当一个事件发生，”演讲者挥舞着手，“我们不是在修改事实，而是在‘切除’那些不再可能的平行世界。这是一个模型操作 (Model Operation) ……”

千夏听得津津有味。虽然她不懂具体的符号，但这种“通过切除可能性来逼近真相”的思维方式，让她感到无比亲切。这不就是实验科学排除错误假设的过程吗？

而凑坐在旁边，双臂抱胸，眉头紧锁。他不得不承认，这套体系比他想象的要严谨。它不是乱糟糟的文字游戏，它有一种精密的代数结构。但他依然在心里抵抗：“这依然是人造的。这只是在模拟，不是实在。”

讲座接近尾声。

“有哪位教授想要补充吗？”主持人问道。

前排，一位满头银发、精神矍铄的老人缓缓站了起来。现场瞬间安静，连凑都能感觉到周围空气的凝重。

那是 **Johan van Benthem**。逻辑学界的“斯宾诺莎”，ILLC 的灵魂人物。

他没有直接评价刚才的动态逻辑技术细节，而是转过身，目光似乎扫过了全场，最后仿佛落在了那个一脸不服气的东方少年身上。

“数学家总是瞧不起逻辑学家，”Van Benthem 微笑着开口，声音温和却充满穿透力，“认为我们只关心符号的推演 (Syntax)，而忽略了数学对象的真实意义 (Semantics)。”

凑的心跳漏了一拍。这正是他刚才的想法，也正是他在 Benno 讲座上一直坚持的观点。

“但是，”老人抛出了那个震耳欲聋的假说，“什么是 Semantics (语义)？当我们说‘这个模

型代表了真实’时，我们大脑里发生的难道不是另一种信息更新吗？”

“刚才这位同学（千夏）似乎很喜欢动态逻辑。”Van Benthem 指了指黑板上的模型更新过程，“因为她看到了‘**过程即实体**’。”

“如果我们把目光放得更长远一点……也许，所谓的‘静态语义’，只是某种动态过程达到不动点（Fixed Point）后的特例。**真正的实在，不是那块静止的石头，而是雕刻出那块石头的刀法（Process）。**”

“如果我们能把这种‘更新’的过程形式化，那么语法和语义的边界，就在那一刻消融了。”

轰——

凑感觉脑子里的一堵墙被推倒了。

他转过头，看着身边的千夏。千夏正听得入神，眼睛里闪烁着“我就知道是这样”的光芒。

他一直认为千夏喜欢的“变化”是噪音，是干扰。但 Van Benthem 告诉他，那个“变化的过程”本身，可能才是构造真理的最高级的语法。

如果逻辑不仅仅是静态的规则，而是动态的流（Flow）……那么他一直抗拒的 HoTT（同伦类型论）里的“路径归纳”，不就是一种在逻辑空间里的动态旅行吗？

走出 Science Park 904 的时候，阿姆斯特丹下起了小雨。

“怎么样？”千夏撑开伞，得意地瞥了凑一眼，“‘文字游戏’好玩吗？”

凑看着灰蒙蒙的天空，沉默了许久。然后，他伸出手，接过千夏手里的伞，遮在她的头顶。

“输给你了，经理。”凑低声说道，语气里带着前所未有的服气，“还有……输给那位老先生了。动态的东西……也许真的有点意思。”

43

阿姆斯特丹的华夫饼与红灯区

43.1 游船与梵高的湍流

周末，为了从那些沉重的哲学思考中抽离出来，凑和千夏在阿姆斯特丹市中心约会。

他们坐上了运河游船。玻璃船顶上满是雨珠，两岸的 17 世纪山形墙建筑缓缓后退。千夏兴奋地指着岸边的船屋，而凑则靠在椅背上，看着水面的波纹发呆。

“还在想那个逻辑学讲座？”千夏戳了戳他的脸。

“嗯。”凑握住她的手，“我一直以为乌得勒支是数学的中心。但也许，阿姆斯特丹这种冷峻的逻辑，才是我缺失的那块拼图。”

随后他们去了梵高博物馆。在二楼的展厅里，他们站在了那幅著名的《麦田群鸦》(Wheatfield with Crows) 前。

那是梵高生前的最后一幅画作之一。深蓝色的天空压得极低，金色的麦浪疯狂翻滚，黑色的乌鸦群像某种不祥的预兆冲天而起。

凑盯着那狂乱的、压抑的笔触，久久没有说话。“千夏，你看那个笔触。”凑指着画中的麦浪，眼神中流露出数学家的痴迷，“这不仅仅是艺术。这是一种湍流 (Turbulence)。在数学上，这就是那维-斯托克斯方程 (Navier-Stokes Equations) 的一个高雷诺数解的相图。”

他越说越兴奋，手指在空中比划着：“你看那种旋转的矢量场，和我在做的向量丛的切截面简直一模一样。梵高看到的不是麦田，是流体力学的奇点……”

千夏无奈地叹了口气。她从纸袋里拿出一块刚买的热腾腾的 Stroopwafel (荷兰焦糖华夫饼)，直接塞进了他喋喋不休的嘴里。“吃你的饼！看画就看画，不要对梵高做傅里叶变换！”

凑嚼着甜得发腻的华夫饼，看着千夏被风吹乱的头发，笑了。焦糖的甜味在嘴里化开，像是幸福的味道。“好甜。”“是吧？笨蛋。”千夏帮他擦掉嘴角的饼干屑，“数学家真是太煞风景了。”

43.2 风车与田园牧歌

下午，两人坐上了去往 Zaanse Schans (桑斯安斯风车村) 的火车。随着列车驶离城市，窗外的景色迅速切换成了大片平坦得不可思议的绿色原野。

这里就像是凝固在 18 世纪的琥珀。巨大的古老风车矗立在赞河 (River Zaan) 河畔，巨大的叶片在风中缓慢而沉重地旋转，发出有节奏的“嘎吱、嘎吱”声。空气里不再是阿姆斯特丹市中心那甜腻的大麻味，而是混合着青草、河水以及附近可可工厂飘来的浓郁巧克力香气。

两人沿着河堤漫步。这里没有高耸入云的写字楼，没有压得人喘不过气来的学术论文。只有漆成深绿色的木屋，白色的蕾丝窗帘，还有在低洼的草地上悠闲吃草的、圆滚滚的绵羊。

“好慢啊……”凑停下脚步，看着眼前名为“De Kat”的风车。

“什么好慢？”千夏手里拿着刚买的一双迷你木鞋纪念品，转头问他。

“时间。”凑眯起眼睛，看着那不停旋转、却又仿佛从未改变的叶片，“在东京，在普林斯顿，时间是指数级增长的流形，每一秒都充满了信息的爆炸。但在这里，时间仿佛是一个常数函数。”

风吹乱了凑的头发，他却没有像往常一样急着去整理。他深吸了一口带着巧克力味的空气，整个人展现出一种千夏从未见过的松弛感。

“千夏。”凑突然开口，声音很轻，被风吹得有些散。

“嗯？”

凑转过身，背对着波光粼粼的河面，看着千夏。他的眼神里没有了那些复杂的同伦群，只有眼前这个穿着羊角扣大衣的女孩。

“有时候我在想，如果在未来的某一天，我们不需要再去追逐那些所谓的‘最前沿’……”凑指了指远处一座孤零零的、带小花园的绿色木屋，“如果我们住在这里。每天早上醒来，只有风车转动的声音。”

千夏愣住了，手里的木鞋纪念品握得紧紧的。

凑往前走了一步，低头看着她，语气无比认真，就像是在陈述一个公理：“远离那些世俗的繁华，没有必要要发的 Paper，没有必要要赶的 Deadline。如果是那样的话……我的世界里只需

要保留两样东西就足够了。”

“哪……哪两样？”千夏感觉自己心跳快要盖过风车的声音了。

“数学，和你。”凑温柔地笑了，那是比解出一道难题时更纯粹的笑容，“这也是一种很美好的生活，对吧？”

轰——

千夏觉得自己的脸瞬间烧了起来，热度简直能把周围湿润的空气蒸发。她原本以为凑只会说些“拓扑不变量”之类的硬核情话，完全没防备这种田园牧歌式的温柔暴击。

“你……你这个笨蛋！”千夏慌乱地用围巾遮住自己通红的脸，声音闷闷的，却藏不住笑意，“谁……谁要和你这种数学宅隐居啊！至少……至少得有网线吧！”

凑看着她害羞的样子，忍不住大笑起来。笑声回荡在空旷的原野上，惊起了一群在河边发呆的野鸭。

43.3 迷失在 De Wallen

傍晚，两人回到市区，直奔唐人街 (Zeedijk)。那里有全阿姆斯特丹最好吃的烧腊饭。

“好久没吃到正宗的米饭了！”千夏满足地扒着叉烧饭，嘴角还沾着酱汁，“还是中华料理最能抚慰亚洲人的胃。”

吃饱喝足后，两人打算散步消食。阿姆斯特丹的街道错综复杂，运河看起来都长得一样。走着走着，周围的气氛突然变了。原本温馨的暖黄路灯，变成了暧昧的、充满诱惑的红色霓虹灯。

橱窗里，不再是纪念品或奶酪，而是穿着比基尼、身材火辣的女郎。她们正对着路人抛媚眼，甚至轻轻敲击玻璃。空气中弥漫着一种奇异的甜腻香气（那是大麻的味道）。

“这……这是哪里？”千夏惊恐地抓住了凑的衣角，眼睛瞪得像铜铃，“为什么大家都穿成这样？”

凑也愣住了。他看了看地图，终于反应过来。“这……这就是传说中的……Red Light District (红灯区)？”

“Hey handsome, want some fun?”一个橱窗里的金发女郎对着凑眨了眨眼。

凑还没来得及脸红，眼前突然一黑。一只温暖的、带着华夫饼香气的手捂住了他的眼睛。

“不许看！不许看！”千夏踮着脚，一只手死死捂着凑的眼睛，一只手拽着他的胳膊，脸红得像个熟透的番茄，大声喊道：“这是……这是非同伦的干扰项！是噪音！会破坏你的纯洁性的！”她情急之下，竟然开始乱用凑教给她的数学名词。

凑被她拖着跌跌撞撞地往前走，嘴角却忍不住上扬。虽然眼睛看不见，但他能感觉到千夏手心的温度，能听到她急促的心跳，还有那种母鸡护崽般的可爱。

“好，我不看。”凑配合地闭着眼，任由她牵着，“我的视线只收敛于你。”“笨蛋！这种时候就不要说这种让人害羞的话了！快走快走！”

两人像逃难一样冲出了红灯区，站在运河边大口喘气。看着对方狼狈的样子，两人忍不住一起大笑起来。在这个陌生的、开放的国度里，在光怪陆离的霓虹灯倒影中，他们依然守着属于彼此的那份纯真和悸动。

44

熵增与不变量

44.1 样本编号 A-07

乌得勒支的冬天，天黑得特别早。下午四点，窗外就已经是一片压抑的深蓝。

千夏回到公寓时，没有像往常一样喊“我回来了”。她在那玄关站了很久，身上的大衣湿漉漉的，还在往下滴水。

凑正在厨房里煮咖啡，听到动静探出头来：“欢迎回来。今晚吃什……”

话没说完，他停住了。借着走廊昏暗的灯光，他看到千夏的眼睛肿得像桃子。

“怎么了？”凑关掉火，快步走过去，“实验出问题了？”

千夏摇了摇头，动作迟缓地脱下鞋子。“A-07 死了。”

凑愣了一下，在脑海里搜索这个代号。“你是说……那只你在实验室喂了两个月的基因敲除小鼠？”

“嗯。”千夏的声音轻得像烟，“明明昨天各项指标都很稳定。今天早上我去的时候，它已经硬了。就在笼子的角落里，缩成一团。”

凑松了一口气。他原本以为是她的论文数据丢了，或者是被导师骂了。“千夏，”他走过去，试图帮她把湿大衣脱下来，“那是实验动物。做生物统计的，这种事不是很常见吗？”

“它不一样。”千夏推开了凑的手，自己走到沙发上坐下，抱紧了膝盖，“我看着它出生的。它本来应该能活到明年春天的。”

44.2 错误的慰藉

凑看着缩在沙发里的千夏，感到一种棘手的困惑。在他的世界里，情绪也是一种函数，应该有解。

他倒了一杯热咖啡，递给千夏，然后坐在她身边，试图用自己最擅长的逻辑来安抚她。

“听着，千夏。从物理学的角度看，并没有什么东西真正‘消失’了。”凑的声音冷静而理性，“物质是守恒的。组成那只老鼠的碳原子、水分子，只是换了一种排列方式回到了自然界。它的信息熵虽然增加了，但总量……”

“别说了。”千夏没有接咖啡。

凑以为她没听懂，于是换了一个更“浪漫”的数学比喻。“你知道拓扑学里最著名的例子吗？咖啡杯和甜甜圈。”凑指了指手里的杯子，“在拓扑学家眼里，它们是一样的。只要不撕裂，无论怎么拉伸、扭曲，本质都不会变。生命也许也是这样，死亡只是在这个流形上的一次连续变换……”

“我让你别说了！”

“啊。

千夏猛地挥手，打翻了凑手里的咖啡。褐色的液体泼洒在白色的地毯上，迅速扩散成一片丑陋的污渍。杯子滚落在地，虽然没碎，但发出刺耳的声响。

凑惊愕地看着她。这是千夏第一次对他发火。

44.3 碎裂的杯子

千夏站起来，胸口剧烈起伏。她的眼里噙满了泪水，那是悲伤，更是愤怒。

“在你眼里，世界就是一团可以随便揉捏的橡皮泥吗？”千夏指着地上的污渍，“看看这个！在你的拓扑世界里，你可以把这一滩水逆向收敛回杯子里，你可以假装时间倒流，假装一切都没发生。”

“但在我的世界里，不行。”

千夏的声音带着哭腔，每一个字都像钉子一样钉在空气中。“碎了的杯子就是碎了。死了的A-07就是死了。无论你怎么做同伦变换，它都不会再呼吸，不会再动了！”

“这就是生物学的第一定律，凑。熵增（Entropy）。”千夏死死盯着他，眼神里有一种凑从未见过的绝望的清醒，“一切终将走向混乱，走向消亡。不可逆（Irreversible）才是绝对的真理。”

凑张了张嘴，喉咙发干。他想反驳。他想说 ∞ -Category 可以超越时间，想说数学构建的柏拉图世界是永恒的。但在千夏那双红肿的眼睛面前，他那些引以为傲的定理，突然显得苍白无力。

他追求的是不变量 (Invariant) ——那些在沧海桑田后依然保持不变的真理。而千夏面对的是无常 (Transience) ——那些注定会流逝、会腐烂、会消失的血肉。

44.4 无法相交的平行线

千夏深吸了一口气，擦掉眼泪。“对不起，打翻了你的咖啡。”她蹲下身，开始默默地收拾地上的狼藉。

凑僵硬地站在那里，看着她瘦弱的背影。他突然意识到，这不仅仅是关于一只老鼠。

他试图用“永恒”去对抗“时间”。而千夏，只能用她脆弱的“肉身”去硬生生地承受“时间”。

他以前觉得，数学可以解释万物。但现在他发现，在他的完美宇宙和千夏的残酷现实之间，横亘着一道深不见底的裂痕。他的数学里没有 t (时间) 这个变量，或者说，他的 t 是可逆的。而千夏的 t ，是一支射出就不回头的箭。

这种无法互相理解的悲哀，比任何复杂的数学难题都让他感到无力。

“我来收拾吧。”凑蹲下身，抓住了千夏拿着抹布的手。千夏的手冰凉。

“凑。”千夏没有收回手，只是低着头看着那块污渍，“有时候我真羡慕你。住在那个不会死的世界里。”

凑的心猛地抽痛了一下。他紧紧握住那只冰凉的手，却悲哀地发现，他虽然能握住她的手，却握不住她感受到的那份流逝。

45

数据的形状与阿尔卑斯山的收敛序列

45.1 维度的诅咒

乌得勒支的雨似乎永远下不完。雨水顺着图书馆巨大的落地窗蜿蜒流下，把窗外的古老钟塔扭曲成一幅印象派的油画。

千夏坐在角落里，揉了揉干涩的眼睛。她的视网膜上仿佛烙印着无数个黑色的散点。屏幕上是由于维数灾难（Curse of Dimensionality）而崩塌的聚类分析图——那根本不是数据，那是一团被猫玩弄过的毛线球。

“两万个基因表达维度……”千夏绝望地把额头抵在冰冷的桌面上，“在这个该死的空间里，甚至连‘距离’这个概念都失效了。”

手里那杯已经冷掉的自动贩卖机咖啡散发着一种陈旧的酸苦味。她感觉自己就是这庞大数据库里的一个异常值（Outlier），即将被算法剔除。

“去阿姆斯特丹吧。”导师的声音在她身后响起，带着一丝荷兰人特有的务实，“VU（阿姆斯特丹自由大学）有一位做 TDA (Topological Data Analysis) 的教授。也许在拓扑学家眼里，混乱是有形状的。”

带着死马当活马医的心态，千夏请了假，在清晨的薄雾中坐上了火车。

VU 的教室里弥漫着粉笔灰的味道。黑板上画着的不是千夏熟悉的统计分布曲线，而是奇怪的条形码（Persistence Barcode）和仿佛在呼吸的扭曲多面体。

“想象一下，”那位头发乱糟糟的教授挥舞着粉笔，眼神狂热，“如果这团数据是一个甜甜圈，我们在低分辨率下只能看到一堆点。但随着我们把每一个点‘膨胀’成球体，它们就会融合。在某个瞬间，中间那个原本不可见的‘洞’（Hole）就会显现出来！”

“这就是 H_1 ，一维同调群。这就是数据的指纹！”

千夏坐在台下，瞳孔微微收缩。她不懂同调群的定义，不懂单纯复形的边界算子。但她感到了一种令人起鸡皮疙瘩的熟悉感。那种描述“洞”、描述“连接”、忽略细节而抓住本质的语言……这不就是凑每天在公寓的玻璃窗上、在用过的餐巾纸上、在每一个空白处疯狂涂写的东西吗？

原来，他手里握着的不是屠龙的屠刀，而是解剖的手术刀。“原来……你一直把这么锋利的刀，藏在了那么厚的刀鞘里啊。”千夏喃喃自语。

回到公寓时，凑正背对着门口，在那块小白板上推导着 ∞ -范畴的纤维化条件。房间里充满了墨水味和某种与世隔绝的清冷。

“凑！你看这个！”千夏鞋都没换，兴奋地冲过去，把平板电脑举到他鼻子底下，“那个教授说可以用同调群来分析癌症数据！你之前画的那个‘圈’，是不是就是这个意思？”

凑停下笔，甚至没有回头，只是用余光扫了一眼屏幕。“关掉。”

“什……什么？”

“我说关掉。”凑转过身，眼神里带着一种近乎洁癖的厌恶，“TDA？那是对代数拓扑的亵渎。把原本精密的同调群，强行套在肮脏的、充满误差的现实数据上，就像是用米开朗基罗的雕刻刀去切烂白菜。不仅切不好，还弄脏了刀。”

千夏愣在原地，举着平板的手僵在半空中。她看着眼前这个为了这把“刀”而日渐消瘦的男人，心中涌起一股无法抑制的怒火。不是因为他看不起她的专业，而是因为他看不起他自己手中的力量。

“烂白菜？”千夏深吸一口气，声音因为愤怒而微微发抖，“你眼里的‘烂白菜’，是无数病人活下去的希望！濑名凑，你究竟是爱数学，还是只爱那个高高在上、不沾尘埃的自己？”

凑被这突如其来的爆发震住了，张了张嘴，却没说出话来。

“好。”千夏把平板摔在沙发上，眼神变得像猎人一样锐利，“你不看是吧？那就别怪我动手了。”

45.2 莱茵河畔的幽灵

三天后。巴塞尔 (Basel) 的清晨冷得刺骨。莱茵河面上飘荡着灰白色的晨雾，河水湍急，拍打着岸边的石阶。

凑裹紧了千夏强行塞给他的羽绒服，一脸的不情愿和困倦。他是被“绑架”来的——千夏威胁如果不陪她去瑞士散心，就把他电脑里的所有 LaTeX 宏包都删掉。

“为什么要在这种地方转车……”凑打了个哈欠，呼出的白气瞬间消散。

“因为这里有幽灵。”千夏靠在河边的栏杆上，望着那座横跨莱茵河的老桥。

“哈？”

“莱茵河的左岸和右岸，在这一段被这几座桥连接着。”千夏指着远处，“三百年前，一个叫欧拉的人就在这河边散步。他思考的问题不是什么虚无缥缈的高维宇宙，而是——‘怎么过桥才能不走回头路’。”

凑皱了皱眉：“柯尼斯堡七桥问题……那是拓扑学的起源。但那只是个游戏。”

“对他来说不是游戏！”千夏猛地转过头，盯着凑的眼睛。河风吹乱了她的刘海，露出一双倔强而明亮的眼睛，“欧拉晚年瞎了，还在计算流体力学，为了让船只造得更稳；他在计算人口增长模型，为了让城市规划得更合理。”

千夏向前走了一步，逼近凑。“真正的巨人，是既能看到星星，也能看到脚下泥土的人。你崇拜格罗滕迪克，崇拜欧拉，但你真的理解他们吗？你只是在模仿他们的孤僻，却丢掉了他们对这个世界的热爱！”

凑愣住了。身后的莱茵河奔流不息，发出低沉的轰鸣声。那种声音让他想起了自己脑海中无数次想要抓住、却又总是溜走的灵感。他一直以为自己缺少的是高度。但此刻，看着千夏眼中的倒影，他突然觉得，也许自己缺少的，是这种像河水一样切入大地的力量。

“车来了。”千夏没有等他回答，转身提起行李箱，“走吧，去见见真正的‘应用’。”

45.3 蓝脑计划 (The Blue Brain)

洛桑联邦理工学院 (EPFL)。Rolex Learning Center 像一片起伏的混凝土波浪，匍匐在日内瓦湖畔。

实验室里光线昏暗，只有中央那面巨大的弧形屏幕散发着幽蓝的光芒。这里是“蓝脑计划”的核心展示区。

“这是大脑皮层的神经微柱。”那位被称为“范畴论女王”的女教授按下回车键，“Minato，仔细看。”

屏幕上的图像变了。亿万个神经元如同星系般被点亮。但这一次，它们不再是杂乱无章的闪烁。随着某种数学过滤器的开启，无数条金色的连线在神经元之间浮现。

它们构成了三角形、四面体……然后是更高维的单纯形。七维。十一维。

巨大的高维几何体在屏幕上缓缓旋转，如同盛开在虚空中的水晶花朵。那是人类记忆和意识诞生的瞬间，被拓扑学捕捉到的形状。

“这……”凑感觉呼吸都要停止了。他下意识地伸出手，想要触碰屏幕。他熟悉的 Betti 数，那些他在草稿纸上枯燥计算的欧拉示性数，此刻正在屏幕上活着。它们在呼吸，在生长，在每一次神经脉冲中构建又坍塌。

“怎么可能……”凑的声音干涩，像是从喉咙深处挤出来的，“这里充满了生物噪声。在这个混沌的湿件（Wetware）里，拓扑结构应该瞬间崩塌才对。”

“生命本身就是鲁棒的（Robust），Minato。”女教授的声音温柔而有力，像是神谕，“数学不是为了逃避现实的混乱，而是为了在混乱中提取出永恒的骨架。你看，这些高维空洞（Cavities），正是信息存储的地方。如果它是完美的晶体，它就死了。”

那一刻，凑心中的某种玻璃墙碎裂了。他一直以为“纯粹”意味着一尘不染。但眼前的景象告诉他，真正的纯粹，是在最肮脏的泥土里开出的最完美的花。他转过头，看到千夏正站在阴影里看着他。她不懂那些高维结构，但她懂美。她的眼里倒映着那朵“水晶花”，脸上带着一种名为“骄傲”的微笑。

45.4 少女峰的齿轮

离开洛桑后，他们坐上了前往少女峰（Jungfraujoch）的红色齿轮火车。这是欧洲最高的火车站，海拔 3454 米。

随着海拔升高，窗外的草地变成了裸露的灰岩，最后变成了茫茫的冰雪。空气变得稀薄，每一次呼吸都需要调动全身的肌肉。

火车钻进了艾格峰（Eiger）腹地的隧道。这是一条在一百多年前，完全靠人工在坚硬的花岗岩里凿出来的隧道。齿轮咬合轨道发出“咔哒、咔哒”的巨响，在黑暗的隧道壁上回荡，震得人胸腔共鸣。

“停一下好吗？”凑突然说。列车正好在观景窗暂停。凑站起身，把手套摘掉，将手掌贴在了

隧道粗糙的岩壁上。冰冷。潮湿。粗糙得如同砂纸。

“1896 年……”凑抚摸着那道人工凿出的痕迹，喃喃自语，“那时候没有有限元分析，没有现代地质雷达。他们怎么敢？万一计算错了一个参数，整座艾格峰就会塌下来，把他们埋葬。”

“是啊。”千夏站在他身后，哈出的白气在昏暗的灯光下氤氲，“他们没有完美的理论。他们不知道能不能成功。但他们还是挖了。”

凑的手指微微颤抖。他一直在等待。等待理论完美，等待 ∞ -Category 的地基夯实，等待所有引理都天衣无缝，才敢迈出证明的一步。他害怕未知，害怕不严谨，害怕那个报错的红叉。

但眼前的这条隧道，是在理论完全不完备的情况下，靠着人类的勇气和直觉，在绝望的岩石中硬生生凿出的一条通天之路。

“工程……”凑收回手，掌心还残留着岩石的寒意，“我以前讨厌工程。我觉得那是充满了妥协和近似的次品。但我错了。”

“工程是伟大的赌博。”千夏看着他，眼神比隧道外的雪光还要亮，“是在理论的悬崖边，纵身一跃的勇气。虽然不严谨，但他们把人类送到了这里。”

火车发出一声长鸣，冲出了黑暗。刺眼的阳光瞬间洒满车厢。阿莱奇冰川 (Aletsch Glacier) 像一条银色的巨龙，静静地卧在群山之间，在大地上刻下千万年的时光。

45.5 未完成的收敛

Sphinx 观景台上，狂风呼啸。

世界在脚下展开，纯白色的雪山连绵起伏，与深蓝色的天空在无穷远处交汇。这里是欧洲之巅，是离天空最近的地方。

凑感觉自己有些缺氧，太阳穴突突直跳。在这种极端的高度下，**大脑仿佛一台过热的处理器，那些平时引以为傲的复杂逻辑符号、 ∞ -范畴的交换图，此刻都被冻结、剥落了**。他感到一种前所未有的赤裸。

没有数学护体，他只是一个伤害了恋人的笨拙男人。

“千夏！”凑不得不大声喊道，声音瞬间被风撕碎。

前方的身影停顿了一下。千夏裹紧了那件显得有些臃肿的羽绒服，慢慢转过身。她的脸被冻得通红，鼻尖也是红的，但那双眼睛里没有泪水，也没有往日的温柔，只有像周围冰川一样坚硬的寒意。

她就那样静静地看着他，仿佛在等待一个解释，或者一个判决。

凑走上前，下意识地想要帮她把被风吹乱的围巾系好。但千夏微微侧过头，避开了他的手。凑的手僵在半空中，指尖感受到了比寒风更刺骨的距离感。

“谢谢你带我来这里。”凑收回手，掌心还残留着刚才触碰岩壁时的寒意，“我一直以为，我要去的地方是 ∞ -Topos 的深处，那里只有纯粹的逻辑。但我错了。”

他指了指脚下那条看不见的铁路，语气中带着一种恍然大悟的兴奋——那是他习惯的、解开谜题后的兴奋。

“你是对的，千夏。如果没有‘工程’，没有‘应用’，没有这种不完美的勇气……我就永远只能在山脚下打转。刚才在隧道里我明白了，粗糙的岩壁也是一种美！是你打破了我的‘紧致性’（Compactness），让我看到了边界之外的世界。”

凑深吸了一口稀薄的空气，看着那个依然沉默的女孩。他以为自己已经找到了通解，于是急切地抛出了他认为最完美的比喻：

“千夏，如果我是那个只知道收敛于自我的柯西序列，那你就是那个完备化空间。是你让我有了极限，是你让我……”

“够了。”

冰冷的声音打断了他。千夏看着他，眼神里不是感动，而是一种深深的疲惫和失望。嘴角扯出一丝嘲讽的弧度。

“濑名凑，你真的很狡猾。”

“诶？”凑愣住了。

“你以为给你的错误安上一个漂亮的数学名词，它就变得高尚了吗？”她向前一步，逼视着凑的眼睛，风吹乱了她的刘海，却遮不住她眼里的锋芒。

“‘柯西序列’？‘完备化’？说得真好听。”千夏的声音在风中有些颤抖，但逻辑异常清晰，“但在你的心里，我的研究依然是‘切烂白菜的刀’，依然是污染你纯洁数学的‘噪音’，对不对？”

凑张了张嘴，却发现自己无法反驳。因为直到刚才为止，他潜意识里确实是这么想的——他只是在智力上承认了工程的地位，却并没有在情感上真正尊重她的心血。

“别用这种廉价的定义来糊弄我。”千夏转过身，背对着他，看向茫茫雪海，“在生物学里，不可逆过程就是不可逆的。打翻的咖啡回不到杯子里，说出口的轻视也收不回来。”

“还有，凑。既然你那么喜欢数学，那我告诉你……”

千夏侧过脸，留下一个冷漠的侧影，说出了那句击碎凑最后一道防线的话：

“你刚才所做的，不过是证明了歉意的‘存在性’（Existence）。但这对我来说毫无意义。”

“我要的是‘构造’（Construction）。如果你真的想收敛于我，那就别光用嘴定义。去把那

个极限具体地造出来啊！”

说完，她没有再看凑一眼，径直走向了观景台的出口。只留下凑一个人站在欧洲的最高点，站在彻骨的寒风中。

这一刻，所有的定理都失效了。随着千夏的离开，周围的温度仿佛瞬间下降了十度。凑看着她决绝的背影，终于明白了一个道理：数学上的收敛只需要一个任意小的 ϵ ，但人心之间的收敛，需要付出比这多得多的代价。

“存在性……与构造……”

他握紧了冻僵的拳头，指甲嵌进肉里。这就是他一直忽略的东西。他一直在宣称真理存在，却从未哪怕一次，为了她去弄脏双手，去“构造”一座桥梁。

“证明它……吗？”凑低声自语。眼神中原本的迷茫逐渐消散，取而代之的是一种解题时的狂热与坚定。

既然经典的定义失效了，那就换一种语言。既然她要构造，那我就去写一本连生物学家也能看懂的字典。

既然如此，那我就写给你看。写一本连生物学家也能看懂的、关于真理的字典。

46

迟来的字典与敲击

46.1 翻译的艺术

从瑞士回到乌得勒支后的整整一周，凑变得异常忙碌。但他没有在推导新的 ∞ -范畴引理，也没有在与葛城争论谱序列的收敛性。

他坐在书桌前，手边放着一叠厚厚的、崭新的方格笔记本。他正在做一件对他来说比证明“几何朗兰兹猜想”还要困难的事情——翻译。

“不能用奇异同调（Singular Homology）的定义……”凑咬着笔杆，眉头紧锁，“对千夏来说，‘连续映射的像’这个概念太抽象了。必须用单纯复形（Simplicial Complex）。要把数据点看成积木。”

他正在试图将高深莫测的代数拓扑，降维打击成生物学家能听懂的语言。

废纸篓里扔满了画废的草图。他画了甜甜圈，画了咖啡杯，然后把它们擦掉，改成了细胞的聚类示意图。他试图解释 H_0 是连通分量（聚类）， H_1 是环（循环过程）， H_2 是空腔（囊泡结构）。

这不仅仅是知识的传递。这是凑在搭建一座桥。一座跨越了“严谨的纯数学”与“混乱的生物学”之间鸿沟的桥。

46.2 给生物学家的同调论

周五的晚上，千夏正趴在客厅的地毯上，对着那堆依然无解的基因数据发愁。突然，一本厚厚的笔记本被轻轻放在了她的面前。

封面上用凑那标志性的、工整得像印刷体一样的字迹写着：《代数拓扑导论：为了理解数据的形状》副标题有一行小字：*For Chinatsu.*

“这是什么？”千夏惊讶地抬起头。

“字典。”凑有些不自在地别过头，视线落在窗外的运河上，“你之前说得对。TDA 不是切烂白菜的刀。如果数据里真的藏着高维结构，那么看不见它，是数学家的失职。”

凑深吸了一口气，转过头，认真地看着千夏的眼睛。“对不起。”

房间里安静了下来。只有运河上偶尔传来的船笛声。

“我之前的态度太傲慢了。”凑的声音很低，但很清晰，“我轻视了你的学科。因为生物学太复杂、太混乱，我就逃避说它没有美感。但在洛桑，在少女峰，我意识到……这种在混乱中寻找秩序的努力，可能比我在纯净的温室里做推导更伟大。”

他指了指那本笔记。“这里面是关于 TDA 的核心概念。Betti 数、持久性图（Persistence Diagram）、条形码……我试着把所有的数学术语都翻译成了……嗯，你喜欢的‘人话’。”

46.3 没有下次了哦

千夏翻开笔记本。映入眼帘的不是冷冰冰的公式，而是精美的手绘图。每一页的页边距上，还贴心地写满了注释：“注意：这里的边界算子 ∂ 其实就是抵消掉内部，只留下边缘。就像你做细胞切片一样。”“不要被滤过（Filtration）吓到，它就是把显微镜的倍数慢慢调大。”

千夏的手指轻轻划过那些笔迹。她能想象到，这个甚至连情书都写不好的笨拙男人，是怎样熬着夜，绞尽脑汁地把那些神圣的数学概念，一个个掰碎了喂给她。

这比任何鲜花都要动人。

千夏合上笔记本，站起身，走到了凑的面前。凑有些紧张。他不知道千夏是会感动得哭，还是会嘲笑他的画工。

咚。

一个不轻不重的爆栗，敲在了凑的脑门上。

“痛……”凑捂着额头，一脸茫然。

千夏收回手，嘴角扬起一抹狡黠又温柔的弧度。她踮起脚尖，凑近凑的脸，用一种既像是在教训学生、又像是在哄小孩的语气说道：

“这次原谅你了，瀨名教授。”

她晃了晃手里的笔记本，就像拿着一份战利品。

“但是记住了，**没有下次了哦**。如果你以后再敢说我的研究是‘烂白菜’，我就把你的 ∞ -Category 全部拿去喂实验室的小白鼠。”

凑看着她那副得意的小表情，愣了一下，随即无奈地笑了。“是，遵命。经理大人。”

在这个雨夜的乌得勒支，凑终于明白了一个拓扑学里学不到的真理：有些错误，是无法通过同伦变换（Homotopy）来修正的，必须通过诚恳的道歉和行动（Action）来填补那个“洞”。

而这本笔记，就是修复他们之间关系的那个同调群生成元。

47

Cambridge：巨人的回响

“上帝创造了整数，其他一切都是人造的。但 K 理论…… K 理论是上帝做梦时看到的景象。”

— 佚名

47.1 三一学院的画像

二月。乌得勒支的阴雨暂歇。凑获得了一个去英国剑桥参加“牛顿数学研究所 (INI)”短期访问的机会。千夏也请了年假，陪他一同前往。

剑桥的空气里弥漫着一种陈旧的书页味、修剪整齐的青草香，还有几百年来沉淀下来的智慧的重量。在一场正式晚宴 (Formal Hall) 上，凑和千夏坐在宏伟的 Trinity College (三一学院) 食堂里。

这里的长桌一眼望不到头，烛光在银质餐具上跳跃。身穿黑色长袍的学生们低声交谈，仿佛

还在讨论着几百年前的某个未解之谜。食堂尽头的墙壁上，挂着历代先贤的画像：牛顿、培根、哈代……他们的目光穿过几个世纪的尘埃，注视着这群年轻的继承者。

但凑的目光，死死地锁定在其中一幅画像上。那是一位眼神深邃、带着睿智且略带顽皮微笑的数学家。Sir Michael Atiyah (迈克尔·阿蒂亚爵士)。

“你知道他是谁吗，千夏？”凑的声音有些颤抖，那是朝圣者见到神像时的激动。他放下了手中的刀叉，完全忘记了盘子里的烤羊排。

千夏歪着头，看着那幅画像：“看起来像是个很慈祥的老爷爷。也是个造海的人吗？”

“他是把拓扑和分析连接起来的神。”凑看着画像，脑海中浮现出那个连接了两个世界的定义。

TOPOLOGICAL K-THEORY

Atiyah & Hirzebruch (1961):

$$K(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BU]$$

Instead of counting holes (Cohomology), we count **Vector Bundles**. Why is this beautiful? Because it connects the shape of space to the linear algebra living on it.

“我在做的色同伦论 (Chromatic Homotopy)，其核心的 v_n -周期性，本质上就是 K-theory 的高阶推广。”凑对着 Atiyah 的画像举起酒杯，红酒在杯中摇曳。“如果没有他在 60 年代引入的 K-theory，没有 Atiyah-Hirzebruch 谱序列，就没有我们现在的一切。Burklund 他们用来证伪望远镜猜想的‘红移’ (Redshift) 工具，源头都在这里。”

“看到他，我就觉得……”凑转过头，看着千夏，眼睛亮晶晶的，“哪怕现在的理论因为那个反例而一片混乱，但数学的根基依然是美的。那种美是不朽的，不会因为一两个猜想的倒塌而消失。”

千夏看着凑。在烛光下，他的侧脸显得格外柔和。“嗯。虽然我不懂 K 理论，”千夏轻声说，“但我喜欢看你谈论它时的样子。那时候的你，像是在发光。”

47.2 康河上的路径同伦

第二天午后，康河（River Cam）。难得的晴天，阳光穿过柳树的枝条，洒在波光粼粼的水面上。

凑租了一艘平底船（Punt）。他脱掉了厚重的外套，卷起衬衫袖子，笨拙地拿着那根长长的竹篙撑船。“小心点！大数学家！”千夏坐在船头，戴着一顶宽檐草帽，手里拿着一颗苹果，笑得前仰后合，“你要把我们翻进河里喂天鹅吗？你的重心太高了！”

“平衡……我在找重心的拓扑不变量……”凑满头大汗地辩解，竹篙在河底的淤泥里打滑，小船在水草间晃晃悠悠，差点撞上岸边的一只绿头鸭。

小船穿过叹息桥（Bridge of Sighs）的阴影，周围变得安静下来。古老的学院建筑倒映在水中，仿佛时间在这里停滞了。

“呐，凑。”千夏把手伸进清凉的河水里，看着指尖划出的波纹，“你觉得我们现在的状态，算是‘稳定’了吗？”

凑停下手中的竹篙，任由小船随波逐流。他看着千夏。阳光洒在她的脸上，细小的绒毛清晰可见。“千夏，在数学里，有一个概念叫路径同伦（Path Homotopy）。”

“又来？”千夏假装生气地鼓起腮帮子，“这种时候禁止讲课！”

“听我说。”凑走到船头，在她身边坐下，握住她湿漉漉的手。“如果两个路径可以通过连续变形互相转换，并且起点和终点固定，我们就说它们是同伦的。对于拓扑空间来说，这两条路本质上是‘同一条路’。”

他指了指身后的康河，又指了指远方。“我们在不断变化，环境在变，身份在变，中间的路径弯弯曲曲，甚至有时候会遇到急流和漩涡。”

凑看着千夏的眼睛，无比认真地说道：“但你是我的起点，也是我的终点。只要这两个端点不动，中间所有的波折、距离、时差，都只是同伦变换而已。”“我们的基本群（Fundamental Group），是平凡的。也就是说，无论世界怎么拉扯，我们的关系都不会被打结，它是最稳固的结构。”

千夏愣住了。她看着眼前这个不懂风情的理科男，听着这世界上最笨拙、却又最深情的告白。脸颊慢慢染上了绯红。她低下头，要把手抽出来，却被凑握得更紧。

“笨蛋。”千夏用另一只手沾了点河水，弹在凑的脸上，眼角却带着泪光，“数学家的情话真是又难懂……又狡猾。”

48

Bonn：豪斯多夫的咖啡与自白

48.1 偶遇神明

离开英国后，湊独自前往德国波恩的 Hausdorff Center for Mathematics (HCM) 参加关于算术几何的会议。波恩是当代代数几何的心脏，不仅因为它有着严谨的学术氛围，更因为这里有那个男人。

午后的研究所公共休息区，阳光透过落地窗洒在地毯上。湊正在和那台复杂的全自动意式咖啡机搏斗。这台机器的界面全是德语，按钮多得像飞机驾驶舱。“Verdammt... (该死)”湊小声抱怨，“这也太非线性了。”

“需要帮忙吗？这台机器的逻辑确实有点像它的名字——豪斯多夫空间一样分离。”一个温和的声音在身后响起。湊转过身，看到了一个穿着深色圆领毛衣、牛仔裤，手里拿着一本破旧笔记本的年轻人。他看起来非常普通，就像任何一个在图书馆通宵的学生。

是 Peter Scholze。

“Dr... Dr. Scholze!”湊手一抖，差点把空杯子摔在地上。“叫我 Peter 就好。” Scholze 熟练地按下了几个按钮，机器嗡嗡作响，流出了香浓的浓缩咖啡，“我记得你，Sena。你在 Condensed Motivic Cohomology 上的那篇预印本很有趣。尤其是那个关于 Solid Modules 的处理，非常巧妙。”

48.2 天才的伤痕

两人端着咖啡，在窗边的沙发上坐下。窗外是静静流淌的莱茵河。聊着聊着，话题不可避免地转到了最近崩塌的望远镜猜想。

“很多人觉得那是灾难，” Scholze 看着窗外，眼神深邃，“但在我看来，那是自由的开始。既然旧的望远镜坏了，我们就造一个新的。”

凑犹豫了一下，双手捧着热咖啡，问出了那个困扰他许久、甚至在普林斯顿差点压垮他的问题：“Peter……您在构建 Perfectoid 空间的时候……有过迷茫吗？毕竟那是对传统几何的彻底颠覆。在您看来，数学是不是一直都很清晰、显而易见？”

Scholze 笑了。那不是神的微笑，而是一种带着一丝少年气的、甚至有些羞涩的苦笑。他卸下了菲尔兹奖得主的光环，变回了一个普通的求道者。

“迷茫？ Sena，我在读本科的时候，试图去读 Voevodsky 关于 Motive 的原著。我读不懂。”

凑震惊了，眼睛瞪得大大的：“连您也……”

“是的。读不懂。” Scholze 点了点头，“那些三角范畴的公理，那些抽象的对应……我觉得它们太‘硬’了，完全不符合我的几何直觉。我有整整半年时间，觉得自己没有数学天赋。我甚至想过转行去搞物理，或者去搞摇滚乐队（虽然我贝斯弹得不怎么样）。”

Scholze 喝了一口咖啡，目光投向远方：“那时候我很痛苦。我不明白为什么大家都觉得那些东西自然。后来我想通了。”“既然我读不懂旧的语言，那说明那不是我的母语。如果我想表达我看到的景象，我就必须造一种我能读懂的新语言。这就是 Perfectoid 和 Condensed 的由来。”

Scholze 转过头，认真地注视着凑的眼睛：“Sena，不要因为读不懂大师的东西而感到羞耻。不要因为跟不上 Lurie 的思路而觉得自己笨。”“那可能只是因为……你的大脑构造和他们不同。你有你自己的直觉。你需要找到属于你自己的母语。”

这句话像是一道强光，瞬间照亮了凑心中最后的一块阴影。原来，所有的天才，都曾在黑暗中摸索。所谓的“强大”，不过是在绝望中重新定义了规则。

“属于我的……母语。”凑重复着这句话，感觉心中的枷锁碎裂了。

49

Paris：森林与修修补补

49.1 IHES：乐观主义者

旅程的最后，是法国。葛城带着凑去了 IHES（法国高等科学研究所），那个位于 Bures-sur-Yvette 森林深处的数学圣地。

在 IHES 的下午茶时间（没错，数学家离不开茶），他们见到了 Laurent Lafforgue。这位菲尔兹奖得主、格罗滕迪克精神的坚定守护者，正独自坐在窗边，看着外面的森林发呆。

当葛城提到望远镜猜想的倒塌时，Lafforgue 并没有表现出丝毫的焦虑，反而充满了法式的乐观与浪漫。“崩塌？不，这只是说明我们之前试图用太简单的工具（Telescope）去窥探 Topos。” Lafforgue 展开双臂，仿佛要拥抱那片森林：“格罗滕迪克说 Topos 是‘床’，或者是‘静谧的河流’。它是包容一切的。旧猜想的倒塌，只是 Topos 在向我们展示它更深邃、更不可预测的一面。”

“我对 ∞ -Topos 充满乐观。” Lafforgue 笑着对凑说，“无论语言怎么变，无论我们是用单纯集还是无穷范畴，核心的那个统一几何与算术的梦想从未改变。我们应该为此开香槟庆祝，因为我们离真理又近了一步，哪怕这一步是踏在废墟上。”

49.2 Paris-Saclay: 修修补补 (Bricolage)

与此同时，在几公里外的 Université Paris-Saclay (巴黎萨克雷大学)。藤井千夏正在参观 I2BC (细胞整合生物学研究所)。接待她的是位名叫 Dr. Valéry 的法国生物物理学家，一个留着乱糟糟胡子、穿着格子衬衫的怪人。

Valéry 的实验室看起来不像一个高精尖的科研场所，更像是一个杂乱的五金店。到处是透镜、激光器、甚至是乐高积木。他骄傲地向千夏展示了一台他亲手搭建的荧光显微镜。“看！这是用 eBay 上买的旧透镜，加上 3D 打印的支架，还有乐高马达组装的！”

“这是……**Bricolage (修修补补)!**” Valéry 笑着说，眼神里闪烁着孩童般的光芒，“在日本，或者在美国，你们可能习惯购买昂贵的、封装好的 Nikon 显微镜。但在法国，我们更喜欢自己动手。”

“为什么？” 千夏好奇地问。

“因为现成的工具虽然完美，但也限制了你的视野。” Valéry 指着屏幕上正在活跃的细胞，那些细胞发着绿色的荧光，像是在跳舞。“工程学追求的是精确和控制。但生物学，或者是科学探索，更像是一种与自然的对话。”“你看，我们搭建一个不完美的环境，利用这种‘修修补补’的灵活性，去诱导它们展示出本质，而不是强迫它们在完美的格子里生长。”

千夏深受触动。她突然想起了凑。凑不喜欢的“铁锤”，就是那种强迫性的、工业化的精确。而他追求的“Rising Sea”，不就是 Valéry 口中的“Bricolage”吗？不就是通过构建环境 (Context)，温柔地诱导真理自己浮现吗？

“原来，” 千夏看着显微镜下的光点，笑着自言自语，“数学和生物，在最高的境界上，都是一种温柔的诱导啊。”“我也找到了……我也能理解你的世界了，凑。”

50

终章：直直化

50.1 Straightening

回到乌得勒支。研讨会的最后一天。707 教室的气氛达到了沸点，随后又坠入冰点。

黑板上，Gijs Heuts 画下了反例构造的最后一步。那是一个极其扭曲、复杂的谱，充满了无数的分叉、环路和高阶相干性。它看起来不像一个数学对象，更像是一团乱麻，或者说——像极了葛城当年在哈佛面对的那团无法理清的绝望。

“我们卡在这里了。” Gijs 扔下粉笔，粉笔在讲台上断成两截，发出清脆的响声，“如果不能把这个树状结构‘拉直’成线性的谱序列，我们就无法计算它的收敛性。但这看起来……不可能。”

全场死寂。连 Moerdijk 都在沉思，眉头紧锁。空气中弥漫着一种“到此为止了”的挫败感。就在这窒息的沉默中，一阵椅子摩擦地面的声音响起。葛城莲站了起来。

他没有像往常那样驼着背，也没有把手插在口袋里。他慢条斯理地扣上了衬衫最上面的那颗扣子——那个他平时觉得勒脖子、永远敞开的扣子。这是一个信号。一个浪子回头的信号。

他转过头，看了一眼身边的凑。凑的眼神清澈而坚定，对着他微微点了点头。那眼神仿佛在说：“去吧，老师。那是你的战场。”

葛城深吸一口气，迈步走向讲台。一步，两步。每一步都像是踩在过去的影子上。波士顿的暴雪、Science Center 里的自卑、躲在东京旧校舍里吃泡面的日日夜夜……那些扭曲的、逃避的时光，此刻都在他脚下破碎。

他走到黑板前，捡起那半截断掉的粉笔。他没有急着写字，而是抚摸了一下黑板粗糙的表面。“Gijs，”葛城的声音平静，却带着一种穿透岁月的力量，“你看到的依然是树。但在我眼里，它们已经是一条线了。”

“如果我们不试图直接计算，而是引入 Moerdijk 先生的 Dendroidal Sets（树状集）……”

葛城的手臂抬起，粉笔落在黑板上。沙——沙——那声音在安静的教室里被无限放大，像是一把手术刀切开病灶。

他在那个扭曲的死结旁边，画下了一个从容、优雅的箭头。

$$\mathfrak{S} : \text{Dend}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

“Straightening Functor（直直化函子）。”葛城念出这个词的时候，仿佛是在念一道赦免自己的咒语。

“我们可以把这个复杂的树状同伦型，无损地、完全地‘拉直’。所有的分叉，所有的混乱，在无穷范畴的语境下，本质上都是一条通往真理的直线。”

他开始推导。粉笔在黑板上飞舞，速度越来越快。他斩断了多余的旁枝，填平了逻辑的沟壑。那些曾经让他恐惧的“高维噪声”，此刻在他笔下驯服得像一群绵羊。他不再是那个被知识淹没的学生，他是这里的驾驭者。

随着最后一个公式的完成，葛城重重地画上了一个句号。

$$\cdots \simeq \lim_{\Delta} \mathfrak{S}(X)$$

就像是魔法一样，那个死结解开了。所有的复杂性都消失了，黑板上只剩下一个清晰、简洁、美得令人窒息的线性结构。

葛城放下粉笔，拍了拍手上的灰尘。他转过身，背对着黑板，面对着台下的顶尖学者们。那一刻，他的背脊挺得笔直，像是一座孤傲的塔。

Gijs 瞪大了眼睛，嘴巴微张，过了好几秒，他猛地拍了一下桌子，声音有些颤抖：“Yes! Exactly! 这就是我们缺失的那一环! Ren……你做到了!”

掌声雷动。那掌声不仅是给数学的，更是给一个归来的者的。

凑坐在台下，看着讲台上那个在尘埃中发光的男人，眼眶湿润。这就是 Straightening。不仅仅是数学上的直直化，把扭曲的结构拉直。这也是葛城人生的直直化。

那个曾经躲在东京旧校舍里、被哈佛的阴影压弯了腰的废人，那个自嘲为“水坑”的男人，终于不再扭曲。他修剪了自己人生中那些逃避的旁枝，拉直了那些悔恨的弯路。他站直了。在世界舞台的中央，在数学的最前沿，他挺直了脊梁，和最强的人平等对话。

此时，窗外下了几个月的雨，终于停了。一道金色的阳光穿透厚重的云层，像舞台聚光灯一样，穿过 707 教室的窗户，照亮了古老的 Dom Tower，也照在了葛城莲挺拔的背影上。

51

停滞的海平面

“我们认为我们在攀登高山，最后却发现是在挖掘隧道。但或许，隧道才是通往大海的捷径。”

— 佚名

51.1 组合学的泥沼

东京大学，博士二年级的冬天。研究室的垃圾桶里堆满了写废的草稿纸，像是一座座白色的坟墓。

濑名凑趴在桌子上，双眼布满血丝。他面前的黑板上，画满了极其复杂的树状图 (Dendroidal Trees)。从乌得勒支归来后，他试图用 Ieke Moerdijk 的树状同伦论为 Jacob Lurie 的 Spectral Algebraic Geometry (SAG) 夯实地基。

他想要证明一个关于 ∞ -Operad 上同调运算的相干性定理。直觉告诉他，这是对的。但在试图写下证明时，他陷入了无穷无尽的组合学泥沼。

COMBINATORIAL EXPLOSION

Problem: Coherence in ∞ -Operads.

Using Dendroidal Sets requires managing tree shuffling at every step.

Ω -colimits are nightmare...

Every "obvious" isomorphism needs 50 pages of simplicial combinatorics.

“这就是真理的样子吗？”

深夜，凑看着窗外的东京塔，感到一阵深深的疲惫。那座塔的光芒在他眼中变得模糊、扭曲。

“格罗滕迪克梦想的是简洁、自然的结构。如果他看到现在的 SAG 背后是如此庞大、丑陋的组合学机器，他一定会皱眉吧。”

他感觉不到美了。那种曾经让他心潮澎湃的“海平面上升”，此刻仿佛变成了一潭死水。无论他怎么计算，水位都纹丝不动。他就像是一个拿着勺子试图把太平洋舀干的傻瓜。

51.2 重读 Pursuing Stacks

绝望中，凑从书架的最底层抽出了一本已经泛黄的、厚厚的打印稿。

那是格罗滕迪克的《Pursuing Stacks》。那是所有高阶范畴论的源头，也是一切梦想的起点。

凑翻开它，试图从那位先知的只言片语中寻找力量。

他的目光停留在了一段关于“模型的僵硬性”的论述上。

“One should not try to define the shape by the points it contains, but by the relations it holds... The rigid model is just a scaffold, not the building itself.” (不应通过包含的点来定义形状，而应通过其保持的关系……僵硬的模型只是脚手架，而非建筑本身。)

轰——

这句话像一道闪电击中了凑。

“脚手架……”凑看着满黑板的单纯集和树状图，“我一直在做什么？我在疯狂地加固脚手架（单纯组合学），却以为我在建造大教堂。”

他一直在用集合论 (Set Theory) 的语言去描述同伦型。他试图把流动的“水”(同伦)强行塞进离散的“沙砾”(集合)里。所以他才需要写那 50 页的证明,去修补沙砾之间的缝隙。

但这根本不是 Rising Sea。这是填海造陆。这是在用蛮力对抗数学的本性。

51.3 迟来的回旋镖

突然,记忆的闸门打开了。一段被他刻意尘封、源自两年前阿姆斯特丹的记忆,跨越时空攻击了他。

——乌得勒支的走廊里, Paige North 的质问:“你还在试图用单纯集来思考吗?那是人造的迷宫。为什么不试试 *Type Theory*?那才是 *Topos* 的母语。”

——ILLC 的研讨室里, Johan van Benthem 的预言:“语义即语法。我们在用逻辑规则‘编织’空间,而不是描述它。”

——还有那个被称为“Brouwer 幽灵”的下午,他对着那些逻辑学家露出的傲慢笑容:“那是警察的逻辑……失去了灵魂。”

凑痛苦地捂住了脸,手指插入发间。

“原来……那个傲慢的傻瓜是我。”

他终于明白了。当年的他,因为迷恋 Lurie 的几何直觉,而轻视了逻辑的形式化力量。他以为那些代码是“人工的枷锁”,殊不知,那是格罗滕迪克一直在寻找的、能够直接描述“关系”而非“集合”的终极语言。

“我一直理解错了。Rising Sea 不是要淹没逻辑,而是要成为逻辑。”

凑猛地抬起头,眼神中没有了疲惫,取而代之的是一种在大彻大悟后的狂热。他抓起抹布,疯狂地擦掉了黑板上那些复杂的树状图。粉笔灰像雪一样落下。

“不需要这 50 页的组合学证明了。如果我在‘内部’思考,如果我承认同构即相等……”

他颤抖着手,打开了电脑浏览器。他不再搜索关于“Dendroidal Sets”的文献。他在搜索框里输入了一个他在阿姆斯特丹听到过、却从未真正去了解的名字:

Homotopy Type Theory (HoTT)

屏幕荧光闪烁,映照着他那张重新燃起希望的脸。这一次,他不再是去寻找一个计算工具。他是去赎罪,去寻找他错过的、通往真理大海的真正入场券。

51.4 千夏的“Bricolage”

与此同时，在农学部的实验室里，藤井千夏也遇到了麻烦。她正在处理一组复杂的基因调控网络数据。传统的统计方法假设网络是静态的，但在真实的细胞中，这些连接是随时间动态变化的。

“单纯的统计不行……”千夏咬着笔杆，看着屏幕上乱成一团的数据，“这就像是一个不断变形的毛线球。”

她想起了在巴黎时，那个法国教授 Valéry 说的词——Bricolage（修修补补）。“如果不能精确描述，那就去‘诱导’它。”

千夏闭上眼睛，脑海中浮现出凑在黑板上画过的那些拓扑变换。“如果把基因表达看作是流形上的流……把突变看作是同伦群的变化……”虽然她不懂严格的数学定义，但那种思维方式已经渗透进了她的骨髓。

她开始尝试一种离经叛道的方法：放弃精确的参数估计，转而寻找网络拓扑结构中的“持久同调（Persistent Homology）”特征。“我不关心具体的数值，我只关心那个‘洞’还在不在。”

51.5 来自过去的信标

绝望中，凑在网上漫无目的地浏览文献。一篇新上传的 ArXiv 论文标题击中了他：*Synthetic perspectives on spaces and categories* 作者：Emily Riehl & Michael Shulman.

Emily Riehl。凑的心脏猛地跳了一下。那是他高中时代的“圣经”——*Category Theory in Context* 的作者。是她（通过书本）教会了那个在废弃地理准备室里的少年什么是范畴，什么是伴随。

凑点开了论文。没有繁琐的单纯集，没有复杂的树状图，没有那些让他恶心的组合学细节。Emily 正在讨论一种全新的视角：**Synthetic Homotopy Theory**（综合同伦论）。

不同于 Lurie 那种从底层构造出发的“解析（Analytic）”方法（像是在用原子搭建汽车），Emily 主张直接定义“类型（Type）”和“路径（Path）”的行为。

“不是去构造它，而是去描述它……”凑喃喃自语。他看到了久违的美感。在那个名为 Homotopy Type Theory (HoTT) 的新世界里， ∞ -Groupoid 不再是一个由无数单纯形拼凑起来的怪物，而是一个基本的、原子的“类型”。

凑颤抖着手，打开了邮箱。他写了一封长信，附上了自己最近关于 SAG 的困惑，以及对这

篇论文的感悟。收件人：Emily Riehl, Johns Hopkins University.

52

巴尔的摩的双螺旋

52.1 JHU：双重圣地

命运的齿轮转动了。一周后，凑收到了 Emily 的热情回信：“你的直觉非常敏锐。Lurie 的 SAG 确实陷入了模型的泥沼。如果你愿意，来 JHU 吧。我们这里正在尝试一种完全不同的方法。”

与此同时，千夏的导师也兴奋地告诉她：“藤井，你那个基因网络拓扑分析上的想法很有趣。约翰霍普金斯大学 (JHU) 的生物统计系对这个方向很感兴趣，他们邀请你去进行为期一年的联合研究。”

JHU。巴尔的摩。那是世界医学与生物统计的巅峰，也是范畴论新学派的堡垒。这对恋人，将在同一个地方，追寻各自的“Rising Sea”。

52.2 Emily 的代码与解放

美国，巴尔的摩。约翰霍普金斯大学的数学系大楼里。凑见到了这位对他影响至深的女数学家。Emily Riehl 留着干练的短发，眼神明亮，充满活力。

“欢迎来到‘综合’的世界，Minato。”Emily 指着白板上的投影。那不是传统的数学公式，那是代码。Lean Prover (形式化验证语言)。

“时代变了。”Emily 笑着说，敲击着键盘，“人类的大脑不适合处理 ∞ -Category 底层那些成千上万个组合学信息。但是，机器可以。更重要的是，通过 HoTT，我们不需要关心底层实现。”

凑看着屏幕。他接触到了一个完全陌生的词汇：**Simplicial Type Theory**。

SYNTHETIC APPROACH

Instead of building ∞ -categories from sets (Analytic), we treat them as native objects in a Type Theory (Synthetic).

$A \rightarrow B$ is just a function type.

The structure of ∞ -category emerges *synthetically* from the axioms.

“这就好比编程。”Emily 解释道，“Lurie 在写汇编语言，在处理每一个寄存器（单纯形）。而我们在写高级语言（类型论）。我们定义对象的行为，而不是它的内部构造。”

凑感到一阵眩晕，随即是巨大的解放感。那些困扰了他半年的、关于树状算子交换律的几百页证明，在这里变成了一行简洁的类型推导。他不需要去搬运每一块砖头（组合学），他可以直接设计大厦的蓝图（逻辑）。

“这就是你要找的 Rising Sea。”Emily 看着凑眼中重新燃起的光芒，“不是淹没在繁琐的计算中，而是提升观察的维度（Logic itself）。当水位上升，那些底层的礁石（组合学困难）自然就看不到了。”

52.3 千夏的 Rising Sea

在校园另一端的公共卫生学院。千夏正站在讲台上，面对着一群世界顶尖的生物统计学家。她的英语虽然带着日本口音，但声音洪亮自信。

“传统的统计学试图用参数去‘抓住’每一个基因的变化，就像用手去抓水里的鱼。”千夏指着屏幕上那个动态变化的拓扑网络图。“但是，如果我们把网络看作一个流形。我们不关心鱼在哪，我们关心水流的方向。”

她展示了利用持久同调（Persistent Homology）分析癌症基因网络的结果。那些在传统 p -值检验下被忽略的微弱信号，在拓扑的视角下，竟然形成了一个清晰的、无法被随机噪声解释的“环（Loop）”。

“这个环，”千夏坚定地说，“就是癌症复发的拓扑特征。”

台下爆发出了掌声。不是礼貌的掌声，是那种被新视角震撼后的、由衷的掌声。一位老教授站起来感叹：“这正是我们需要的 Rising Sea。你没有试图解决每一个局部的小问题，你用一种新的语言（拓扑），淹没了噪声，让真理自己浮现出来。”

讲座结束后，凑在门口等她。千夏冲出来，扑进凑的怀里。“凑！我做到了！我没有用‘铁锤’去砸数据，我让海水把它们托起来了！”

凑紧紧抱着她，闻着她身上淡淡的消毒水和香水的混合味道。“我知道。你一直是最好的经理，也是最好的选手。”

在这个异国的港口，两艘船同时扬帆起航。他们不再是一个天才和一个跟班。他们是两名并肩作战的探索者，在各自的海域里，掀起了属于自己的巨浪。

52.4 恐怖谷与机械降神

约翰霍普金斯大学，Krieger Hall 的地下机房。这里没有粉笔灰，只有服务器风扇的低频嗡嗡声。

凑盯着黑色的终端屏幕，光标在 `goal` 窗口疯狂闪烁。他感到恶心。一种生理上的排斥感。

“该死……”凑狠狠地敲了一下退格键，“为什么？为什么我必须证明这个？”

屏幕上是一行红色的报错：

```
type mismatch: expected (A B) C = A (B C),
but terms are not definitional equal.
```

“显然是相等的啊！”凑对着屏幕低吼，就像对着一个冥顽不灵的傻瓜，“在 ∞ -Category 里，结合律是在同伦意义下成立的，只要有一个 3-simplex 填充……”

他在脑海里能清晰地看到那个四面体（Tetrahedron）的填充，那是一种流动的、完美的几何直觉。但在 Lean 的世界里，他的直觉撞上了一堵名为“语法”的铁墙。如果不在代码里显式地构造出那个 `path`，电脑就拒绝承认它们相等。

这简直是退步。这是从灵动的“意会”退化到了死板的“言传”。

“你在试图‘翻译’你的直觉，Minato。”

Emily Riehl 端着两杯咖啡走进来，靠在机柜旁，看着焦躁的凑。“你在把 Lurie 的几何直觉，强行塞进归纳类型（Inductive Types）的格子里。这就像是试图用一个个像素点去画出完美

的圆。你当然会感到痛苦，因为那是无限的信息量。”

“可是不这样怎么做？”凑绝望地指着屏幕，“如果不构造底层的单纯集，机器怎么知道它们是相干的？”

“这说明你的数学观还停留在‘旧石器时代’——也就是集合论时代。”Emily笑着放下咖啡，走到键盘前，“你认为只有‘具体的集合’才是真实的。但 HoTT 告诉我们：**行为即本质，路径即相等。**”

52.5 第一次接触：单价公理 (Univalence)

Emily 删掉了凑写的那几百行试图构造单纯集的代码。她输入了一行让凑感到陌生的指令。

```
1 -- Univalence Axiom: Isomorphism is Equality
2 axiom ua {A B : Type} : (A ≈ B) → (A = B)
```

“看着，Minato。”Emily的声音变得严肃，“在传统的数学里，你有一个杯子 A，一个杯子 B。它们原子结构完全不同，但功能一模一样（同构）。在 ZFC 集合论里，你永远不能说 $A = B$ 。你必须痛苦地写一个‘传输函数’，把 A 的性质搬运给 B。”

“这就是你觉得累的原因。你在做搬运工。”

Emily 指着那行 ua 代码。“但在 HoTT 的世界里，Voevodsky 赐予了我们‘上帝的特权’。只要你能证明 A 和 B 同构，**它们就是相等的**。不是‘像’，是‘是’。电脑会自动把针对 A 证明的所有定理，瞬间‘传输’（Transport）给 B。不需要搬运。不需要重新证明。”

凑愣住了。他看着屏幕上那个小小的等号。

在他的脑海里，原本那个需要几百页纸来描述的、充满了无数次手动搬运的“同伦相干性”迷宫，突然崩塌了。取而代之的，是一条光速隧道。

“这就是……Syntax（语法）的力量？”凑喃喃自语。

“对。以前我们认为‘语法’是枯燥的符号游戏，是‘几何’的对立面。”Emily眼神灼灼，“但 HoTT 揭示了，**语法本身就是最高维度的几何**。路径归纳（Path Induction）就是几何上的连续变形。我们在写代码，其实是在操纵高维空间中的路径。”

“Rising Sea 不再是比喻了。”凑的手指颤抖着悬在键盘上，“**Type Theory（类型论）就是那片海**。它把所有同构的东西‘浮’在同一个水平面上，让我们可以忽略底层的差异，直接在海面上行走。”

那一刻，湊听到了锁链断裂的声音。他从“几何直觉”的牢笼中解放了出来，进入了“形式逻辑”的自由王国。

53

最终的融合

“机器不会思考，但它能替我们记住所有的细节，让我们得以在那片无限的真理之海上，专注于航行。”

— *EMILY RIEHL*

53.1 四把剑

回到东京大学。博士三年级的深秋。本乡校区的银杏大道再次染上了金黄，但濑名凑已经不再是当年那个看着落叶发呆、感叹人生无常的少年。

坂本研究室的角落里，凑的办公桌仿佛是一个微缩的战局沙盘。他的书架上，书目发生了一种奇妙而和谐的共存：Jacob Lurie 的那本黑色砖头《Higher Algebra》旁边，并排立着 Emily Riehl 的《Homotopy Type Theory》；Ieke Moerdijk 关于树状集的草稿纸下，压着千夏送给他的关于“基因调控网络”的生物统计学论文。

他的大脑里，此刻汇聚了当今数学界最锋利的四把剑：

- **Jacob Lurie** 的宏大框架 (SAG)，提供了世界观；
- **Ieke Moerdijk** 的底层组合学，提供了骨架；
- **Gijs Heuts** 的色同伦论直觉，提供了显微镜；
- **Emily Riehl** 的综合逻辑方法 (Synthetic Method)，提供了翅膀。

◦

53.2 赛博空间的通灵者

坂本研究室的灯已经连续亮了三个通宵。葛城莲站在门口，不敢进去。因为他感觉里面的气氛变了。

凑坐在四块显示器包围的“堡垒”中。他不再抓头发，不再在草稿纸上狂乱地画图。他安静得像一尊佛像。只有机械键盘清脆的敲击声，像是一种精密的、不间断的祷告。

屏幕上流动的不是普通的 Lean 代码，那是凑用数学直觉构建的“大教堂”。

```

1  -- The Geometric Satake Equivalence
2  -- By Minato Sena, using Synthetic Homotopy Theory
3
4  universe u v
5
6  class GeometricSatake (G : Group_Scheme.{u}) where
7    -- Define the Affine Grassmannian not as a set of points,
8    -- but as a Higher Inductive Type ( HIT )
9    Gr : Type u
10
11   -- The Satake Category via Derived Algebraic Geometry
12   Sat : Category.{v} (PervasiveSheaves Gr)
13
14   -- The Dual Group via Langlands Duality
15   G_check : Group_Scheme.{u}
```

凑的十指在飞舞。他现在进入了一种奇妙的境界——通灵 (Channeling)。

以前，他做数学时，脑子里必须时刻绷紧，像杂技演员一样同时扔着十个盘子（保持十个复杂的同伦相干性不掉下来）。但现在，他把盘子扔给了 Lean。

“这里需要一个 $(n + 1)$ -cell 的填充……”凑心中默念，手指输入 `apply path_induction`。

电脑瞬间回应：`Goals accomplished`。

“这里需要把左边的模结构传输到右边……”凑输入 `transport (ua_iso_lemma)`。

电脑瞬间回应：`Type matched`。

这就是“人机合一”。凑的大脑负责在云端构思宏大的蓝图，而 Lean 负责在地面上用绝对坚固的逻辑砖块将它砌成。他不再担心地基会塌陷，因为编译器（Compiler）是绝对诚实的上帝，它不接受任何谎言。

“葛城老师，”凑突然开口，声音沙哑却充满神性，但他没有回头，目光依然锁死在代码上，“你知道吗？我现在感觉不到我在写代码。”

葛城走近一步，看着那些像外星文字一样复杂的类型推导。“那你在做什么？”

“我在**抚摸**形状。”凑抬起手，在虚空中轻轻划过，仿佛那里真的有一个不可见的流形，“Lean 的报错信息，不是阻碍。那是墙壁。我在黑暗中摸索，当我撞到墙（Type Error）时，我就知道形状的边界在哪里。当我通过（Type Check）时，我就知道那里是通的。”

“机器给了我一双手。一双可以触摸高维无穷的手。”

53.3 最后的审判 (No Goals)

最后一步。几何朗兰兹对应的核心等价性。

这是一个困扰了数学界几十年的超级难题。如果不使用计算机，人类需要写下大约 5000 页的证明，而且没人能保证其中没有哪怕一个微小的笔误。

但现在，所有的引理都已就位。所有的“水”都已上涨。

凑输入了最后一行策略（Tactic）。

```

1 theorem final_equivalence : Sat G    Rep G_check := by
2   -- Use the synthetic bridge constructed over the last 3 years
3   transitivity (Hecke_Category G)
4   apply equivalence_of_categories
5   -- The moment of truth: Coherence check
6   exact synthetic_coherence_strategy

```

他按下了 `Enter`。

风扇的声音突然变大。CPU 开始全负荷运转。那是硅基大脑在以每秒亿万次的速度，遍历着那个由人类智慧构建的逻辑迷宫。

葛城屏住了呼吸。他在哈佛见过无数天才在黑板前崩溃，但他从未见过这种场面——一个人类，把审判权交给了机器。

一秒。两秒。

屏幕右侧的红色警告条 `goals remaining: 1` 还在闪烁。

三秒。

那是漫长的三秒。凑闭上了眼睛。他在脑海里最后一次确认了那个从 S^1 到 S^∞ 的同伦路径。是通的。一定是通的。如果数学是美的，它就必须是通的。

“叮。”

屏幕闪烁了一下。红色的警告条消失了。

取而代之的是一行平静得令人心悸的绿色文字：

`No goals.`

`Build succeeded.`

房间里死一般的寂静。

凑慢慢地把手从键盘上拿开。他看着那行字，眼泪无声地流了下来。

“结束了。”凑轻声说。

这不是因为他解出了一道题。而是因为他在这一刻确认了——**人类的理性是可以被固化的**。那些飘忽不定的灵感，那些深夜里的顿悟，终于不再是风中的烛火。它们变成了坚硬的代码，变成了永恒的重言式 (Tautology)。

“这是……永恒的证明。”葛城看着屏幕，声音颤抖。他意识到自己见证了历史。这不仅是几何朗兰兹的胜利，这是数学从“手工业”迈向“工业时代”的第一声汽笛。

凑转过椅子，看向葛城。他此时极其疲惫，却笑得像个孩子。

“老师，我们不仅造了海。”凑指着屏幕上的绿色文字，“我们还造了船。以后的人，不用再游得那么辛苦了。”

53.4 最后的摆渡人

凌晨四点。屏幕上的绿色文字 `No goals` 依然亮着，像一只永不疲倦的眼睛。

凑因为极度的虚脱，已经趴在桌子上睡着了。但葛城莲没有睡。

他手里拿着凑打印出来的、厚达三百页的 Lean 代码库结构图。他戴着老花镜（虽然他才四十多岁，但视力下降得厉害），试图用一只红笔，去核对其中的一个引理——关于 E_2 -项的收敛性。

十分钟。二十分钟。葛城的笔尖悬在半空中，一动不动。那一滴红色的墨水终于凝聚不住，滴落在白纸上，晕开像一朵残败的花。

他看不懂。

曾经，他是那个教凑什么是谱序列、什么是模型范畴的人。他曾经以为，只要自己足够努力，就能追上这上涨的海水。但现在，看着这些由归纳类型 (Inductive Types)、单价公理 (Univalence) 和多态递归构成的代码，他感到了深深的绝望。

这不是他熟悉的数学。这是外星的语言。凑已经驾驶着一艘核动力的潜艇去了深海，而葛城还划着漏水的木筏，在岸边打转。

“我没用。”葛城摘下眼镜，痛苦地捂住脸。“我连做他的审稿人都不配了。”

这种被时代抛弃的虚无感，比当年他自己在哈佛失败时还要强烈。因为这一次，他是眼睁睁看着自己亲手培养的学生，跨过了一道他永远跨不过的门槛。

“老师？”身后传来凑沙哑的声音。

葛城慌乱地戴上眼镜，试图掩饰自己的失态。“啊……把你吵醒了？我只是想……再检查一下那个引理。”

凑揉了揉惺忪的睡眼，看了一眼葛城面前那张染了墨渍的纸，又看了看葛城颓唐的神情。他瞬间明白了一切。

凑站起身，走到饮水机旁接了两杯水，递给葛城一杯。“老师，别看了。那些代码是给编译器看的，不是给人看的。”

“可是……”葛城的声音有些颤抖，“如果不把这些翻译成普通的数学语言，*Annals* 的那些老家伙是不会承认的。他们看不懂代码。他们需要几何直觉。”

凑点了点头，目光灼灼地看着葛城。“没错。机器验证了它是‘对的’(True)，但机器没法告诉人类‘为什么’(Why)。”

凑从打印机里抽出一叠空白的纸，放在葛城面前，然后深深地鞠了一躬。

“所以，拜托您了，老师。”

葛城愣住了。“拜托我……什么？”

“翻译。”凑直起身，眼神里充满了信任，“这套理论的骨架是我用 Lean 搭起来的，它是绝对坚固的，但也绝对冰冷。它没有灵魂，没有故事，没有那种能让人看到‘形状’的描述。”

凑指了指那堆空白纸。“我现在的脑子里全是语法和类型，我已经不会说‘人话’了。但是老师您不一样。您依然拥有那种敏锐的几何直觉，您知道怎么用最优美的语言去描述一个结构。”

“我是造船的人。”凑握住了葛城那只拿笔的手，“但您是摆渡人。只有您能写出这篇论文的 Introduction（引言），只有您能把那些还在岸上观望的数学家，渡到我们的船上来。”

葛城看着凑。他看到了学生眼中的真诚。那不是怜悯，那是请求。凑不需要他去计算谱序列了，但凑依然需要他的智慧，去赋予这些冰冷代码以人类的温度。

“摆渡人……吗？”葛城喃喃自语。他转头看向窗外。东京的黎明正在升起，淡蓝色的晨光洒在那些写满代码的纸上。

他曾经梦想成为征服大海的船长。他失败了。但他培养出了一位能造出诺亚方舟的船匠。而现在，船匠邀请他成为这艘船的领航员。

“这活儿可不轻松啊，凑。”葛城深吸了一口气，重新握紧了手中的红笔。这一次，他的手不再颤抖。

他那双浑浊的眼睛里，重新燃起了久违的光芒。那是二十年前，他在哈佛的图书馆里第一次读到格罗滕迪克时的光芒。

“把第二章的直观图拿给我。”葛城的声音变得沉稳而有力，“你这里的逻辑虽然通了，但叙述太干巴巴了。我们要让那群老顽固读到第一段时，就感动得哭出来。”

凑笑了。他知道，那个叱咤风云的“哈佛归国天才”葛城莲，回来了。

在那个黎明，师徒二人背对背坐着。一个人在敲击键盘，与机器对话，构建永恒的真理。一个人在沙沙书写，与人类对话，讲述真理的故事。

54

终章：不变不灭的誓言

54.1 博士学位的加冕

三月。东京大学安田讲堂。巨大的管风琴奏响了庄严的乐章。

当坂本教授亲手把紫色的博士学位披肩给凑戴上时，台下爆发出了热烈的掌声。坂本教授看着眼前这个曾经狂妄、如今沉稳的青年，难得地露出了笑容。他用只有两人能听到的声音说：“Congratulations, Dr. Sena.” “你证明了我当年的担忧是多余的。你找到了一条不需要在那张名片上妥协的路。你让数学的纯粹和生活的具体，达成了完美的同伦等价。”

凑转过身，在人群中寻找。他看到了葛城。那个曾经颓废的家里蹲，现在穿着笔挺的西装（虽然领带还是歪的，显然是临时系上的），眼眶微红，正拼命地对着他竖大拇指，嘴型说着：“干得漂亮，怪物。”

他看到了千夏。她穿着一身得体的米色套装，怀里捧着一束巨大的向日葵，笑得比春天的阳光还要灿烂。她现在的身份不仅仅是凑的“经理”，也是即将前往美国顶尖医学院就职的“藤井博士”。

54.2 婚礼：流形与不变量

一个月后。轻井泽，石之教堂。这座由石头和玻璃层叠构建的教堂，寓意着坚硬（男性）与柔和（女性）的结合，光线透过玻璃洒下来，在地面上形成了一道道神圣的光栅，仿佛是几何学的圣殿。

休息室里。葛城莲作为伴郎，正紧张地帮凑整理着领结，手比新郎还抖。“喂，别抖啊。你面对谱间隙（Spectral Gap）的时候都没眨眼，怎么结个婚把你吓成这样？”

“这比谱间隙难多了……”凑深吸一口气，看着镜子里的自己，手心全是汗，“数学是有逻辑的，但幸福……幸福是混沌的。”

婚礼进行曲响起。大门打开。藤井千夏穿着洁白的婚纱，挽着父亲的手，一步步走向那个在终点等她的男人。光影在她身上流转。凑看着她。从高中时那个拿着关东煮闯进旧校舍的女孩，到大学时那个用“不动点”守候他的恋人，到在普林斯顿雪夜给他送味增汤的救星，再到如今的新娘。她是他在充满变数和混沌的拓扑世界里，唯一确定的真理。

54.3 数学家的誓词

轮到新郎致辞。凑接过麦克风，看着台下的亲友，又看向眼前的千夏。他深吸了一口气，原本准备好的稿子被他攥在手心，但他没有看。

“千夏。”凑的声音有些颤抖，但无比坚定。“在这个世界上，数学家们一直在寻找一种东西，叫做 **Invariant**（不变量）。”台下的数学系同学们发出了善意的笑声，葛城在旁边捂住了脸，仿佛在说“这小子没救了，婚礼上讲课”。

但凑没有停。他的眼神只有千夏。“世界是一个复杂的流形（Manifold）。我们在时间中形变，我们在空间中扭曲。我们的容颜会衰老，我们的际遇会改变，就像拓扑空间在连续变换下变得面目全非。”

凑上前一步，紧紧握住千夏的手，感受着她的温度。“曾经我以为，只有 ∞ -Category 里的真理才是永恒的。但我错了。”

“即使我们被生活的重力拉伸、被距离压缩、被岁月的洪流扭曲成任何形状……我对你的爱，是这所有的变换中，唯一保持不变的量。”

“你是我的欧拉示性数，你是我的基本群。无论我在多高维度的深渊里探索，只要你在，我就能定义我自己，我就不会迷失方向。”

凑从口袋里拿出戒指，那是一对专门定制的、莫比乌斯环形状的铂金对戒。“藤井千夏，你愿意成为我生命中唯一的、永恒的同伦等价吗？”

千夏早已泪流满面。她不懂什么是流形，不懂什么是同伦等价。但她听懂了每一个字背后的重量。那是笨拙的数学家，剥开了所有复杂的公式，用他最神圣的语言，献上的最高级的浪漫。

“我愿意。”千夏哽咽着伸出手，让那枚象征无限循环的戒指套在指尖。“即使你是那个永远长不大的高中生，即使你要去算那些没人懂的符号……我也愿意永远做你的经理，永远做你的不变量。”

54.4 尾声：Rising Sea

仪式结束后，凑、千夏和葛城三人站在教堂外的草坪上，眺望着远处的浅间山。夕阳将天空染成金色，就像多年前在旧校舍眺望的那样。风中带着轻井泽特有的清凉。

“接下来打算怎么办？濑名博士？”葛城解开了领带，恢复了那副慵懒的样子，点了一根烟，深深吸了一口气。

“回美国。”凑搂着千夏的肩膀，眼中闪烁着对未来的期待。“Jacob Lurie 邀请我回普林斯顿 IAS 做博士后，继续完善那个形式化验证的项目。我们要把 Rising Sea 变成 Rising Code。”

“而且，”凑转头看着千夏，眼中满是骄傲，“经理也要去。”“我也收到了 Offer。”千夏笑着拿出一封邮件，那是来自纽约的邀请函，“Weill Cornell Medicine (康奈尔大学医学院)。就在纽约曼哈顿，离普林斯顿只有一个小时的火车车程。”

“我要去那里继续做我的生物网络拓扑研究。”千夏的眼里闪着自信的光，她不再是那个只会做厚蛋烧的跟班，她是独立的科学家，“我要用凑教给我的‘Rising Sea’哲学，去解决癌症基因组里的难题。不仅仅是数学有大海，生命科学里也有我要去征服的大海。”

“挺好。”葛城吐出一口烟圈，看着天空，仿佛看到了那个名为格罗滕迪克的幽灵在云端微笑。“你们去大洋彼岸，征服各自的大海。我留在这里守着东大的灯塔。如果有遇到资质好的小鬼，我会再把他们推下海的。”

“那就要拜托您了，葛城老师。”

风吹过，卷起几片花瓣。凑感觉自己仿佛又回到了那个充满粉笔灰的下午。那个看着格罗滕迪克的书，对着那颗坚硬的“核桃”发愁的少年。

“有些数学家像拿着锤子砸核桃，但我更喜欢把核桃泡在水里，等待海平面上升，让外壳自然软化。”

曾经，他以为这只是数学的方法论。但现在他明白了。这也是生活的方法论。

不需要用蛮力去对抗生活的坚硬，不需要用焦躁去敲打未来的大门。要有耐心，要有爱，要有哪怕在废墟上也能重建的勇气。让智慧与爱像海水一样温柔地上涨，那些看似坚不可摧的困难（核桃），终究会自然打开，露出里面甜美的果实。

“走吧，千夏。”“嗯！去纽约吃贝果！”

在那片蔚蓝的、无边无际的数学之海与生活之海上，一艘名为“未来”的小船，正载着爱与真理，扬帆起航。